Решение Заочного тура «Олимпиады ЮМШ–2011» для 7–8 классов

1. Миша и Соня добирались из деревни в город — частью пешком, частью на телеге, которая едет втрое быстрее пеших ребят. Миша ровно полпути прошел пешком, а Соня проехала на телеге половину того времени, что затратил Миша на дорогу. Какую часть пути Соня проехала на телеге?

   ОТВЕТ: Соня проехала на телеге весь путь.

   РЕШЕНИЕ: Пусть Миша прошёл полпути за $3t$ часов; тогда вторую половину пути он прошёл втрое быстрее, то есть за t часов. Всего Миша потратил $4t$ часов.

   Соня ехала на телеге вдвое меньше времени, то есть $2t$ часов. Поскольку Миша за t часов проехал полпути, то Соня за $2t$ часов как раз успела проехать весь путь.

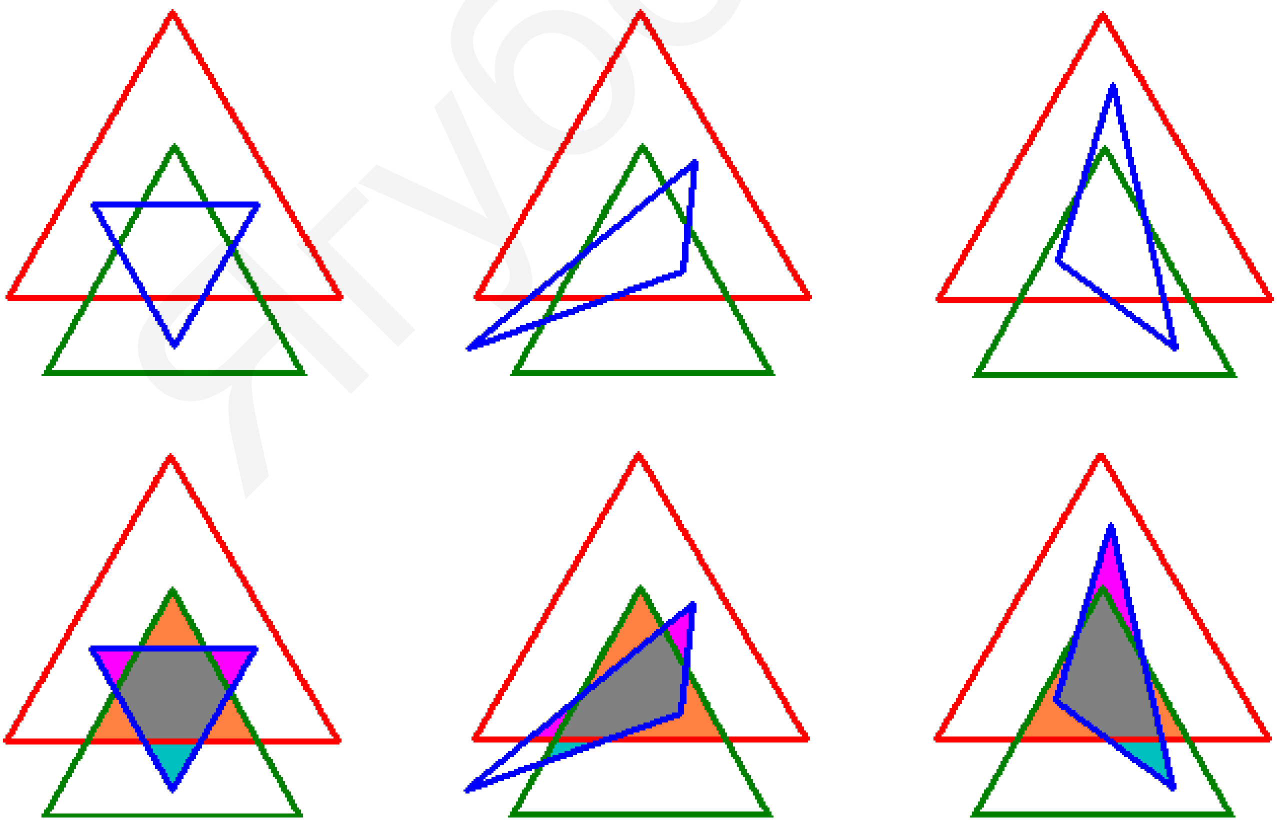
   (Разумеется, эту задачу можно решить и составлением уравнения.)

   Начисление баллов *Максимум — 4 балла. Приведён только ответ без комментариев — 2 балла. Приведён ответ и доказано, что он подходит — 3 балла (не доказано, что нет других ответов). За пропуск шагов в текстовом решении, а также за введение конкретных расстояний и времён с потолка (например, «пусть Миша ехал на телеге 1 час») может сниматься балл.*

   Довольно многие вместо половины времени, затраченного Мишей на всю дорогу, взяли половину времени, которое он ехал на телеге (и получили ответ «3/4 пути»). Это, увы, 0 баллов.

2. Однажды ночью на поле приземлились три летающие тарелки — красная, зеленая и синяя. Каждая из них густо усыпала порошком своего цвета некий треугольный участок. Наутро удивленные жители обнаружили, что пересечение красного и зеленого участков имеет форму треугольника, пересечение красного и синего — четырехугольное, а зеленого и синего — пятиугольное. Может ли при этом пересечение всех трех участков быть шестиугольным?

   ОТВЕТ: Да, может (см. рисунок).



а) б) в)

   РЕШЕНИЕ: На рисунке показаны несколько возможных картинок. В большинстве верных решений приведена картинка типа а).

Начисление баллов *Максимум — 5 баллов. Нарисована верная картинка при неверном ответе — 3 балла. Нарисована картинка, которая содержит 5+6 (т.е. 5- и 6-угольник), или 3+4+5, или 3+4+6 — 1 балл (независимо от ответа). Только ответ — 0 баллов.*

3. У двух малышей есть два одинаковых набора из 36 кубиков. Вася разложил их на семь кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.

   РЕШЕНИЕ: Утверждение Васи означает, что всего имеется не более семи различных типов кубиков (в каждой кучке — не более одного типа, но кубики одинакового типа могут быть разложены и в несколько кучек). Утверждение Гены означает, что кубиков каждого типа не более пяти (в каждой из кучек Гены — не более одного кубика каждого из типов, кучек всего пять).

   Таким образом, если бы оба мальчика сказали правду, то общее число кубиков не могло бы быть больше, чем $7 \cdot 5 = 35$. Но так как их 36, то кто-то из мальчиков ошибся.

   Начисление баллов *Максимум — 6 баллов. Многие решения содержали неточности, например, вместо «всего имеется не более семи типов кубиков» было написано «всего имеется семь видов кубиков», вместо «в одной из кучек хотя бы 8 кубиков» — «в одной из кучек 8 кубиков» и т.д. За это обычно снималось 1–2 балла.*

   Кроме того, 1 балл можно потерять за фразу «Ответ: ошибся Гена» (или, наоборот, Вася), потому что неизвестно, кто же из них ошибся. Также не приветствуются всякие недоговорённости, пропуск слов в ответственных местах и т.д. В общем, потерять пару баллов на этой задаче несложно.

   В некоторых работах рассматривался только случай, когда у Васи 6 кучек по 5 кубиков и одна с шестью кубиками, а у Гены — 4 кучки с семью и одна с восемью. Хотя этот случай и является в каком-то смысле «самым плохим», он далеко не единственный, поэтому такое решение верным считать нельзя. За рассмотрение только этого случая ставилось 2 балла.

4. На шоссе длиной 2000 км расставлены «стометровые» столбики (через каждые 100 м). Около одного из них, на растоянии ровно 900 км от начала дороги, находится железнодорожный переезд. Руководство хочет поставить возле некоторых столбиков полицейских так, чтобы полицейские стояли через одинаковые промежутки, причем первый стоял возле первого столбика (в начале дороги), а переезд находился на равных расстояниях от двух ближайших к нему полицейских. Сколькими способами это можно сделать?

   ОТВЕТ: 12.

   РЕШЕНИЕ: Часть дороги от начала до переезда состоит из 9000 «стометровок». Заметим, что в этом промежутке укладывается полуцелое число расстояний между полицейскими, то есть целое количество таких расстояний плюс ещё половина. Если через d обозначить расстояние между полицейскими, выраженное в «стометровках», то получим: $d(k+1/2) = 9000$, где d и k — целые. Умножив обе части на два, получаем: $d(2k+1) = 18000$, то есть $d = 18000/(2k+1)$. Иначе говоря, допустимые значения d получаются в результате деления 18000 на все его нечетные делители.

   Возможно и другое рассуждение. Полицейские стоят симметрично относительно переезда, поэтому на отметке 1800 км должен стоять полицейский. Поэтому в первые 18000 стометровок укладывается целое число промежутков между полицейскими. Ясно, что это число должно быть нечётным, иначе на отметке 900 км тоже оказывается полицейский. При делении 1800 км на нечётное число равных отрезков получается то, что надо: переезд оказывается в середине среднего отрезка.

   Итак, каждый способ соответствует нечётному делителю числа 18000. Чтобы сосчитать количество таких делителей, разложим 18000 на простые множители: $18000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 3^2$. Любой нечётный делитель такого числа — это произведение нескольких (от 0 до 2) троек и нескольких (от 0 до 3) пятёрок. Количество троек можно задать тремя способами, количество пятёрок - четырьмя, следовательно нечётных делителей всего 12. Как указано выше, каждому из них соответствует свое значение d. Кроме того, очевидно, что переезд находится ближе к началу дороги, чем к ее концу, поэтому если место предыдущего полицейского определилось, то и следующий (т.е. симметричный относительно переезда) полицейский тоже поместится на дорогу, а не окажется за ее концом.

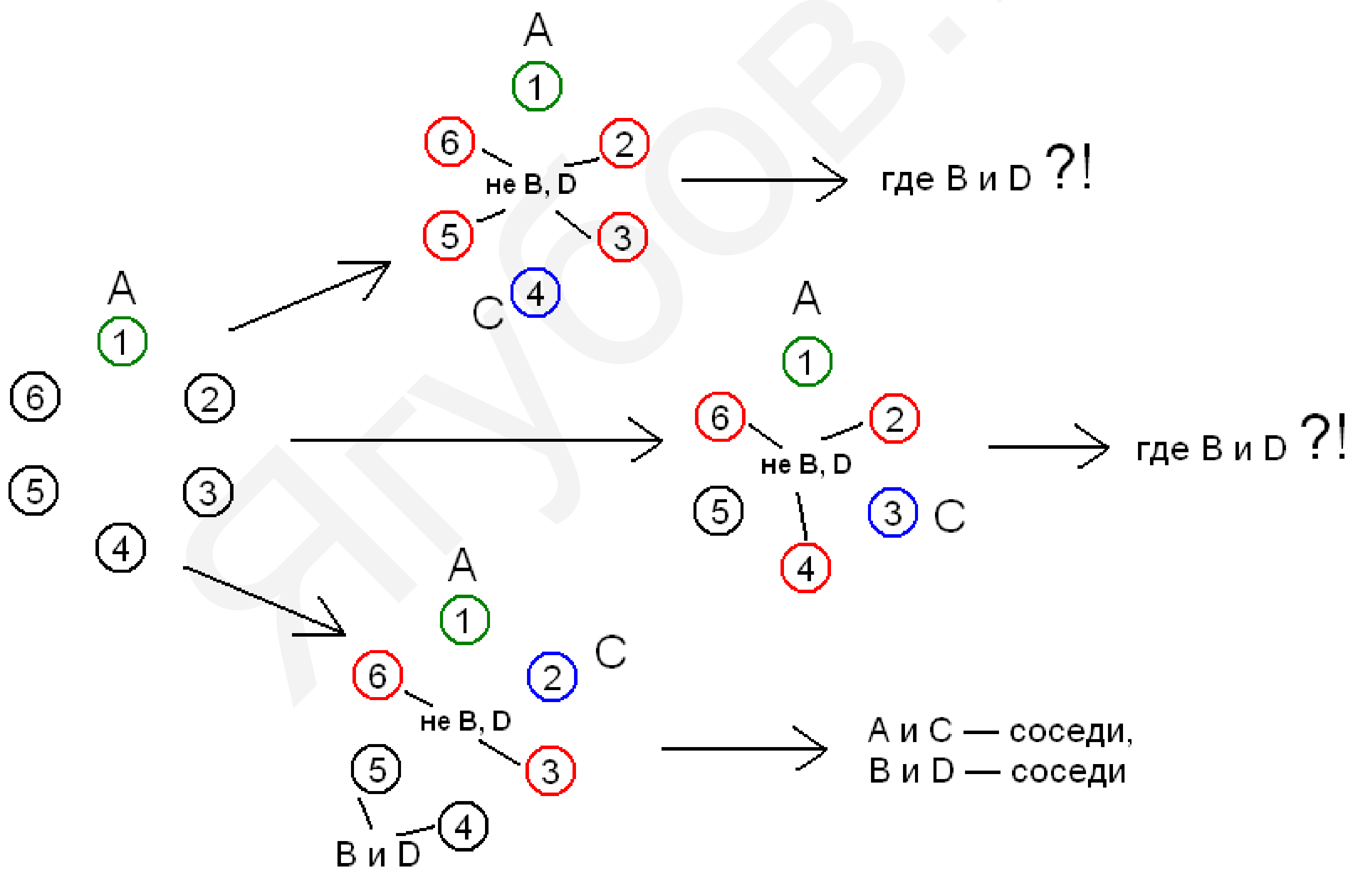
Начисление баллов *Максимум — 7 баллов. За мысль о том, что надо считать нечётные делители числа 18000, даётся 4 балла, за поиск или подсчёт делителей — ещё 3. Популярной ошибкой оказался пропуск случая, когда полицейских всего 2 (на отметках 0 и 1800 км), за это снимался 1 балл.*

Только за ответ 12 (при отсутствии какого бы то ни было обоснования) давался 1 балл. Если приведены хотя бы два верных способа расстановки — 1 балл; хотя бы три верных при отсутствии неверных - 2 балла.

Кое-кто из участников понял условия неверно, и у них получились другие задачи. Так, некоторые решили, что километры и метры — это одно и то же. Некоторые зачем-то добивались, чтобы и в конце дороги тоже стоял полицейский. Для обеих этих задач верные решения оценивались примерно в 2 балла.

5. В деревне есть шесть домов, стоящих по кругу, в каждом живет по старожилу. Про любых двух старожилов можно отправить запрос в компьютерную базу и выяснить, являются ли они соседями. Можно ли гарантированно выявить таким образом какую-нибудь пару соседей, если о каждом человеке можно спрашивать не более двух раз?

   ОТВЕТ: да, можно.



РЕШЕНИЕ: Выберем четырёх старожилов A, B, C, D и запросим базу о парах $A+B$, $B+C$, $C+D$, $D+A$. Если на какой-то из запросов пришел ответ «да», то соседи найдены. Поэтому будем считать, что на все четыре запроса ответ отрицательный. Предположим, что A живёт в доме 1 (см. рисунок). Тогда C не может жить в доме 4, иначе B (который живёт в одном из четырёх оставшихся домов) будет соседом либо A, либо C. Если C живёт в доме 3, то и B, и D должны жить в доме 5 (чтобы не быть соседями A и C), а это невозможно. Аналогично C не может жить в доме 5; значит, он живёт в доме 2 или 6. В этом случае B и D должны занимать два дома напротив A и C. Таким образом, мы выявили даже две пары соседей: $A+C$ и $B+D$.

Начисление баллов *Максимум — 8 баллов. Верный алгоритм отправки запросов — 4 балла. Обоснование правильности этого алгоритма — ещё 4 балла. Только ответ — 0.*

Частая ошибка: автор показывает, что можно задать по два вопроса про каждого и получить все отрицательные ответы, а потом говорит: «Вот видите, мы задали шесть вопросов, а соседей так и не нашли!». Такое решение оценивается нулём баллов. Ведь, как мы видели, даже отрицательные ответы при умелом подходе дают возможность найти соседей.

Эта идея — извлечение информации из отрицательных ответов — видимо, наиболее сложна в задаче. Поэтому мы давали пару баллов даже за неверные рассуждения, которые свидетельствуют о её понимании.

Комментарий для некоторых участников. Старожил — от слов «старый + жить», тот, кто исстари (то есть давно) где-то живёт. А вовсе не от слова «сторожить»!

6. Вася играет сам с собой в игру. Вначале он пишет на доске положительное число (не обязательно целое). За один ход он может стереть наименьшее число (одно из наименьших, если их несколько), разбить его на два положительных слагаемых x и y и записать на доску два числа $2x$ и $3y$ (например, стерев число 3, можно записать 2 и 6, что соответствует $x = 1$, $y = 2$). Может ли Вася добиться того, чтобы в тот момент, когда на доске окажутся 2011 чисел, все они были равны единице?

ОТВЕТ: да, может.

РЕШЕНИЕ: Покажем, как должен действовать Вася, чтобы в конце получить 2011 единиц. Для этого заметим, что последним его ходом две единицы получаются как $2x$ и $3y$, то есть $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, а стертое число было равно $x+y = \frac{5}{6}$ (и Вася действительно мог стереть это число, так как оно меньше всех остальных 2009 единиц). Теперь найдем, какое число должен стереть Вася, чтобы в результате получить два числа 5/6 и 1: $2x = 5/6$, $3y = 1$, откуда $x + y = 3/4$. Докажем, что и предыдущие ходы Васи могут быть сделаны по такому же алгоритму: если Васе нужно получить некоторое число z и 1, то для этого он должен стирать число $z/2 + 1/3$. Отметим, что если $2/3 < z < 1$, то $2/3 < z/2 + 1/3 < z < 1$, поэтому каждое стертое Васей число действительно является наименьшим (причем единственным наименьшим, так как все остальные числа каждый раз равны 1).

Заметим, что в задаче не спрашивается, чему должно быть равно число, написанное вначале Васей. Поэтому нахождение ответа на этот вопрос (даже правильного) никак не оценивается. На всякий случай сообщаем, что для приведенного выше алгоритма действий Васи исходное число равно $\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{2010}}$.

РЕШЕНИЕ (второй способ). Заметим, что число 3/4 обладает следующими свойствами:
1) Из него можно получить 3/4 и 1 (возьмём $x = 1/2$, $y = 1/4$, тогда $2x = 1$, $3y = 3/4$).
2) Из него за два хода можно получить три единицы (возьмём $x = 5/12$, $y = 1/3$, тогда $2x = 5/6$, $y = 1$; теперь сделаем из числа 5/6 две единицы: $x = 1/2$, $y = 1/3$, $2x = 3y = 1$).

Используем эти два свойства: сначала сделаем из числа 3/4 набор «число 3/4 и 2008 единиц», а потом заменим 3/4 тремя единицами.

Начисление баллов *Максимум - 9 баллов. Некоторые алгоритмы проходят, только если убрать из задачи слово «наименьшее»; за такие решения давалось примерно 4 балла. Другие алгоритмы на самом деле подходят, но авторы забывали доказать, что всякий раз стирается наименьшее число; здесь баллы снимаются в зависимости от неочевидности этого факта (например, при решении вторым способом он совершенно очевиден).*

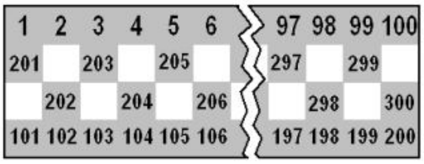
Если найдено число, из которого можно получить две единицы, или само это число и единицу — даётся 2 балла. (Пример такого решения: «Из 3/4 можно получить 3/4 и 1, поэтому можно получить 3/4 и 2011 единиц». Но остаётся неясным, куда же девается число 3/4.)

Только ответ — 0.

7. У Миши есть прямоугольник 4×100 клеточек. Даша закрашивает в нем клеточки в каком-то порядке. Но Миша запретил ей закрашивать клеточку, двумя или более сторонами примыкающую к уже закрашенным клеточкам. Какое наибольшее количество клеточек Даша может закрасить таким образом?

ОТВЕТ: 300 клеток.

РЕШЕНИЕ: Сначала объясним, как должна действовать Даша, чтобы закрасить 300 клеток. Для этого ей достаточно закрасить сначала всю верхнюю строчку слева направо (100), потом всю нижнюю строчку слева направо (еще 100), а потом закрашивать две средних строчки слева направо в шахматном порядке (еще 100 клеток), как показано на рисунке. При этом каждый раз закрашиваемая клетка будет примыкать к ранее закрашенным не более чем одной стороной.



Теперь докажем оценку, т.е. утверждение о том, что Даше не удастся закрасить более 300 клеток. Разобьем мысленно весь прямоугольник на 100 квадратов 2×2. Заметим, что в каждом квадрате закрашено не больше трёх клеток (если в одном из квадратиков закрашены все четыре клетки, то последняя из них, когда её красили, примыкала к двум уже закрашенным клеткам этого квадратика). Значит, в сумме закрашено не более $3 \cdot 100 = 300$ клеток.

Начисление баллов *Пример стоит 5 баллов (если не описан порядок закрашивания, то на 1 балл меньше). Оценка стоит ещё 6 баллов (если не обосновано, почему квадрат 2×2 нельзя закрасить целиком — на 1 балл меньше). Только за ответ «300 клеток» даётся 2 балла. Пример закраски не менее 240 клеток (например, 250 клеток «змейкой») приносит автору 2 балла, пример закраски 200 клеток (например, в шахматном порядке) — 1 балл.*

Идея об использовании квадратика 2×2 в доказательстве — 2 балла.

Большинство участников неверно интерпретировали задачу: они решили, что у каждой клетки даже после окончания процесса должно быть не больше одного закрашенного соседа. Разумеется, в этом случае можно было бы закрасить не больше 200 клеток (400 клеток легко разбиваются на 200 пар соседних, а в каждой паре можно закрасить не более одной клетки).