

Часть I(Вариант № 609)

A1 Внесите множитель под знак корня $2\sqrt[8]{q^3}$.

- 1) $\sqrt[8]{2^9 q^3}$. 2) $\sqrt[8]{2q^{24}}$. 3) $\sqrt[8]{2^8 q^3}$. 4) $\sqrt[8]{2q^3}$.

Решение:

$$2\sqrt[8]{q^3} = \sqrt[8]{2^8 q^3}.$$

Верный ответ 3).

A2 Найдите значение выражения $3^a \cdot 3^{-3a}$ при $a = -\frac{1}{2}$.

- 1) 4,5 2) $\frac{1}{9}$ 3) 3 4) $-\frac{1}{18}$

Решение:

Верный ответ 3).

A3 Найдите значение выражения $3 \cdot 0,4^{\log_{0,4} 8}$.

- 1) 1,2 2) 24 3) 3 4) 60

Решение:

$$3 \cdot 0,4^{\log_{0,4} 8} = 3 \cdot 8 = 24.$$

Верный ответ 2).

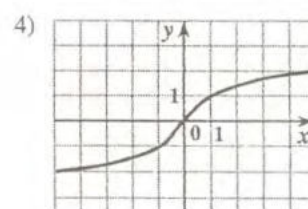
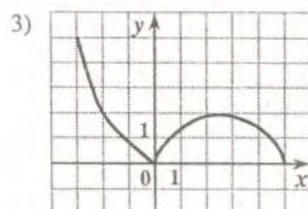
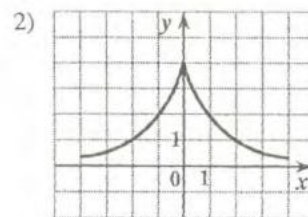
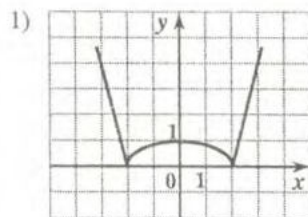
A4 Упростите выражение $-4\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 3$.

- 1) $\cos 2\alpha$ 2) 7 3) -1 4) $-\cos^2 \alpha$

Решение: $-4\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 3 = -4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 3 = -4 + 3 = -1$.

Верный ответ 3).

A5 На одном из рисунков изображён график нечётной функции. Укажите этот рисунок.



Нечётная функция обладает свойством, что она центрально-симметрична фигура относительно начала координат. Такой график изображён на рисунке 4).

Верный ответ 4).

A6 Найдите множество значений функции $y = \log_{0,1} x + 10$.

- 1) $(0; +\infty)$ 2) $(10; +\infty)$ 3) $(-\infty; +\infty)$ 4) $(-\infty; 10)$

Решение:

Логарифмическая функция неограниченная, поэтому множество значений $(-\infty; +\infty)$.

Верный ответ 3).

A7 Решите неравенство $3^{2x-3} \leq 27^x$.

- 1) $[-0, 6; +\infty)$ 2) $(-\infty; -3)$ 3) $[-3; +\infty)$ 4) $(-\infty; 3)$

Решение:

$$3^{2x-3} \leq 27^x \Leftrightarrow 3^{2x-3} \leq 3^{3x} \Leftrightarrow 2x-3 \leq 3x \Leftrightarrow 2x-3x \leq 3 \Leftrightarrow -x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

$$[-3; +\infty)$$

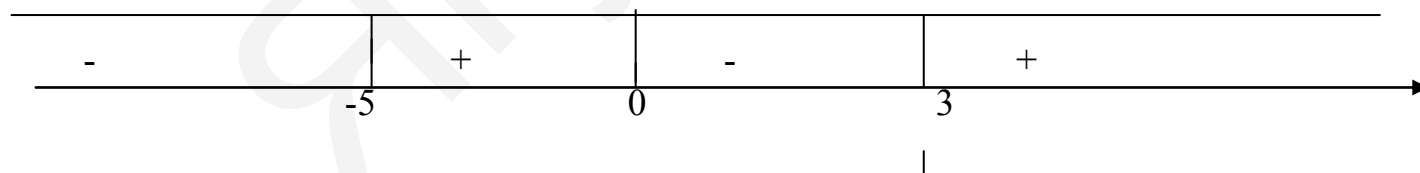
Верный ответ 3).

A8 Решите неравенство $\frac{x+5}{4x^2-12x} \geq 0$.

- 1) $(-\infty; -5] \cup (0; 3)$
2) $[-5; 0) \cup (3; +\infty)$
3) $(-\infty; -5] \cup (3; +\infty)$
4) $(-5; 0) \cup (3; +\infty)$

Решение:

$$\frac{x+5}{4x^2-12x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{4x(x-3)} \geq 0. \text{ Применяем метод интервалов}$$



Возьмём значение $x = 1$

$$\text{Получим } \frac{x+5}{4x(x-3)} = \frac{1+5}{4 \cdot 1(1-3)} = \frac{6}{-8} < 0$$

Выбираем ответ $[-5; 0) \cup (3; +\infty)$ 0 и 3 не включаются т.к. при этих значениях знаменатель равен нулю.

Верный ответ 2).

A9Решите уравнение $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\pm \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

4) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Используя, таблицу значений тригонометрических функций и формулу решения уравнения $\cos x = a$. Получаем.

$$2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Верный ответ 1).

A10Найдите производную функции $y = 1,5x^2 \cos x$.

1) $y' = -3x \sin x$

2) $y' = 3x \cos x - 1,5x^2 \sin x$

3) $y' = 0,5x^3 \cos x - 1,5x^2 \sin x$

4) $y' = 3x \cos x + 1,5x^2 \sin x$

Решение: $y' = (1,5x^2 \cos x)' = 1,5(x^2)' \cos x + 1,5x^2 (\cos x)' = 3x \cos x - 1,5x^2 \sin x$.

Верный ответ 2).

B1Решите уравнение $\log_7 x + \log_7 6 = \log_7 12$.

Решение: $\log_7 x + \log_7 6 = \log_7 12 \Rightarrow \log_7 6x = \log_7 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$.

Записать ответ 2.

B2Решить уравнение $\sqrt{5-\delta} = \delta - 5$.

$$\sqrt{5-x} = x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-5 \geq 0 \\ 5-x = (x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 5, \\ x^2 - 9x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x_1 = 5, x_2 = 4 \end{cases}$$

Записать ответ 5.

B3

Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Для нахождения углового коэффициента этой касательной необходимо найти значение производной функции в точке x_0 .

$$f'(x) = 10x - 3.$$

$$f'(-2) = 10(-2) - 3 = -23$$

Записать ответ – 23.

Часть II

B4 Вычислите $\sqrt[3]{4\sqrt{7}-8} \cdot \sqrt[3]{8+4\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4\sqrt{7}-8} \cdot \sqrt[3]{8+4\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36} &= \sqrt[3]{(4\sqrt{7}-8)(4\sqrt{7}+8) \cdot 36} = \sqrt[3]{(112-64) \cdot 36} = \\ &= \sqrt[3]{48 \cdot 36} = \sqrt[3]{8 \cdot 216} = 2 \cdot 6 = 12.\end{aligned}$$

Записать ответ: 12.

B5 Найдите значение выражения $8,5\sin 2x$, если $\cos x = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $-\pi < x < 0$.

Решение: $8,5\sin 2x = 8,5 \cdot 2\sin x \cos x = 17\sin x \cos x$,

Найдём $\sin x$. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Так как угол расположен в четвёртой четверти, то значение синуса отрицательно. Значит $\sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = -\sqrt{\frac{16}{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

Получаем значение выражения:

$$8,5\sin 2x = 8,5 \cdot 2\sin x \cos x = 17\sin x \cos x = 17 \cdot \frac{-4\sqrt{17}}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -4.$$

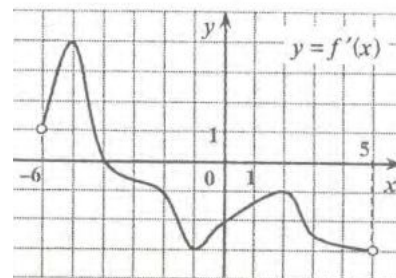
Записать ответ -4.

B6

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 5)$.

На рисунке изображен график ее производной.

Найдите точку x_0 в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение: Если производная положительна, т.е. её график расположен выше оси ОХ, то функция на этом промежутке возрастает. Для данного графика производная положительна на отрезке от -6 до -4 . Значит наибольшее значение будет там, где функция кончит возрастать. Эта точка -4 . От -4 до 5 функция убывает.

Записать ответ: -4.

B7 Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{3-2x} \cdot \log_2(10-x^2) = 0$

$$\sqrt{3-2x} \cdot \log_2(10-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3-2x} = 0, \\ \log_2(10-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1,5, \\ 10-x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1,5, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

Значения под корнем $(3 - 2x)$ и $(10 - x^2)$ не могут быть отрицательны, поэтому из этих значений можно выбрать только 1,5 и -3.

Найдём их произведение $1,5 \cdot (-3) = -4,5$.

Записать ответ: - 4,5.

B8

Найдите значение функции $y = f(x)g(-x) - f(-x)$ в точке x_0 , если известно, что функция $y = f(x)$ - четная, функция $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_0) = 3$, $g(x_0) = -2$.

Решение: По определению нечётной функции $g(-x) = -g(x)$, а чётной $f(-x) = f(x)$. Получаем: $y = f(x_0)g(-x_0) - f(-x_0) = -f(x_0)g(x_0) - f(x_0) = -3 \cdot (-2) - 3 = 3$.
Записать ответ: 3.

***B9**

Агрофирма предполагает продать пшеницы на 4% меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ей надо повысить цену на свою пшеницу, чтобы получить за нее на 0,8% больше денег, чем в прошлом году?

Решение: Пусть x - количество пшеницы проданной в прошлом году, тогда в этом году агрофирма продаст $x - 0,04x = 0,96x$. y - цена на пшеницу в прошлом году.

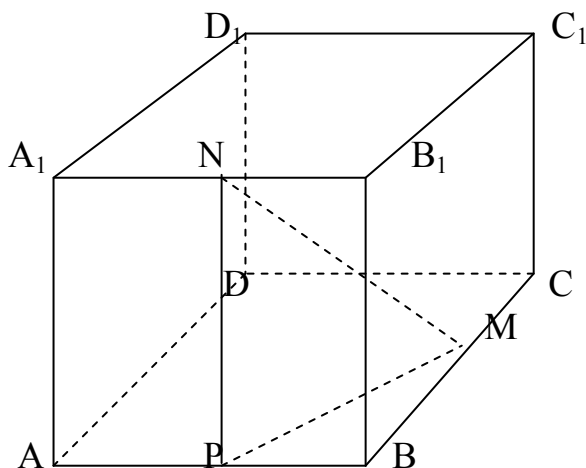
Значит выручка фирмы в прошлом году составила $x \cdot y$. Выручка в этом году должна составить $1,008xy$. Цена пшеницы тогда будет $1,008xy : 0,96x = 1,05y$. Значит цена должна вырасти на $1,05y - y = 0,05y$, т.е. цена вырасти должна на 5%.

Записать ответ: 5.

***B10**

Сторона основания правильной четырехугольной призмы в 2 раза больше ее бокового ребра. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение:



Точки N и M середины отрезков A_1B_1 и BC соответственно по условию. Опустим перпендикуляр из точки N на основание. Соединим отрезки N и M с основанием перпендикуляра точкой P. Треугольник NPM – прямоугольный. $NM = 4\sqrt{3}$. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы равна произведению периметра квадрата лежащего в основании на высоту. Высота призмы в данном случае совпадает с длиной ребра и равна также NP. Пусть $NP = x$. $BC = CD = DA = AB = 2x$. $S_6 = 4 \cdot 2x \cdot x = 8x^2$. На основании теоремы Пифагора $PM^2 + PN^2 = NM^2$.

$$PM = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(2x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{2} \cdot x, PN = x.$$

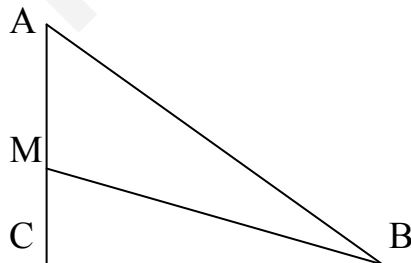
Получаем уравнение $2x^2 + x^2 = 48 \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x = 4$.

Значит, боковая поверхность будет равна $8 \cdot 16 = 128$.

Записать ответ: 128.

***B11**

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса BM. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABC равна 12, а синус угла A равен $\frac{1}{3}$.



Пусть $AC = x$, $CB = y$. По свойству биссектрисы угла $BC:BA = CM:MA(1)$.

По условию и формуле площади прямоугольного треугольника $AC \cdot CB = 2 \cdot S \Rightarrow$

$$xy = 24, S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle A \Rightarrow 12 = \frac{1}{2 \cdot 3} x \cdot AB \Rightarrow xAB = 72, \text{ По теореме Пифагора}$$

$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 72, \\ xy = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{y} \sqrt{\frac{576}{y^2} + y^2} = 72 \\ x = \frac{24}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{576}{y^2} + y^2} = 3y \\ x = \frac{24}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^4 - y^4 = 576, \\ x = \frac{24}{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[4]{72}, \\ x = \frac{24}{\sqrt[4]{72}} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{6\sqrt{2} + \frac{96}{\sqrt{2}}} = \sqrt{54\sqrt{2}}$$

$$\text{По (1) } CM:MA = \sqrt[4]{72} : \sqrt[4]{5832} = \frac{1}{3}$$

$$CM+MA = \frac{24}{\sqrt[4]{72}}, MA=3CM. \Rightarrow 4CM = \frac{24}{\sqrt[4]{72}} \Rightarrow CM = \frac{6}{\sqrt[4]{72}}.$$

$$AM = \frac{18}{\sqrt[4]{72}}$$

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin \angle A = \frac{1 \cdot 18 \cdot \sqrt[4]{5832} \cdot 1}{2 \cdot \sqrt[4]{72} \cdot 3} = 9.$$

Возможно существует более короткое решение.

Записать ответ: 9.

C1

Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{\log_{17}^2(2x-15)}{x-40}$

лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{1,7}{40-x}$.

Решение: Если значения одной функции лежат ниже чем значения другой, то разность значений этих функций < 0 .

$$\frac{\log_{17}^2(2x-15)}{x-40} - \frac{1,7}{40-x} < 0 \Rightarrow \frac{\log_{17}^2(2x-15)+1,7}{x-40} < 0.$$

Числитель этого выражения всегда больше нуля, значит для того, чтобы выражение было меньше нуля нужно $x-40 < 0$, а логарифм существует только для положительных чисел.

Получим

$$\begin{cases} 2x-15 > 0, \\ x-40 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7,5, \\ x < 40 \end{cases} \text{ Общее решение: } 7,5 < x < 40.$$

Записать ответ $(7,5; 40)$.

C2

Решить уравнение $\sqrt{(7-2^x)^2} + \sqrt{(2^x+8)(10-2^x)} = 2^x - 7$

$$\text{Решение: } \sqrt{(7-2^x)^2} + \sqrt{(2^x+8)(10-2^x)} = 2^x - 7 \Rightarrow |7-2^x| + \sqrt{(2^x+8)(10-2^x)} = 2^x - 7$$

Правая часть уравнения больше нуля, значит и правая должна быть больше нуля т.е.

$2^x - 7 > 0$, значит получим

$$\Rightarrow 2^x - 7 + \sqrt{(2^x + 8)(10 - 2^x)} = 2^x - 7 \Rightarrow \sqrt{(2^x + 8)(10 - 2^x)} = 0 \Rightarrow 2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10.$$

Записать ответ: $\log_2 10$.

Часть III.

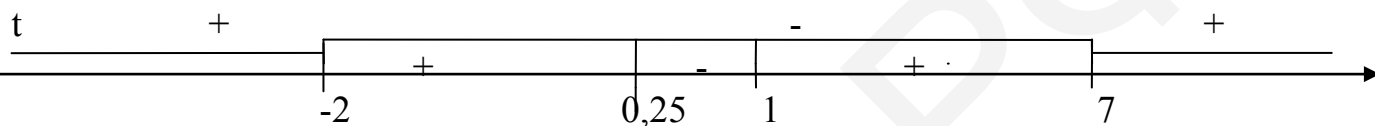
С3 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b = 5a^3 - a^6 + 6$ и $c = a^{-5}(a^{-1} - 5a^2) - 4$ больше -8 .

Решение: Если наименьшее больше -8 , то и второе тоже больше -8 .

Получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 5a^3 - a^6 + 6 > -8, \\ a^{-6} - 5a^{-3} - 4 > -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a^3 - a^6 + 14 > 0, \\ \frac{1}{a^6} - \frac{5}{a^3} + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^6 - 5a^3 - 14 < 0, \\ 4a^6 - 5a^3 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^3 - 7)(a^3 + 2) < 0, \\ (4a^3 - 1)(a^3 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a^3 = t| \begin{cases} (t - 7)(t + 2) < 0, \\ (4t - 1)(t - 1) > 0 \end{cases}$$



Решение верхнего неравенства $t \in (-2; 7)$

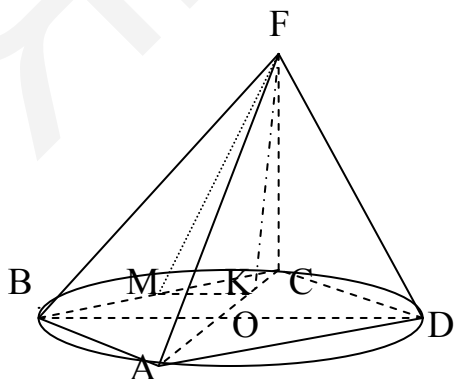
Решение нижнего неравенства $t \in (-\infty; 0,25) \cup (1; +\infty)$.

Общее решение системы $t \in (-2; 0,25) \cup (1; 7)$

$a \in (\sqrt[3]{-2}; \sqrt[3]{0,25}) \cup (1; \sqrt[3]{7})$. По условию задачи требуется выбрать только положительные значения a

Записать ответ: $a \in (0; \sqrt[3]{0,25}) \cup (1; \sqrt[3]{7})$.

***С4** Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D – последовательно на окружности сечения так, что объём пирамиды $FABCD$ наибольший. Найдите косинус угла между прямой FM и плоскостью AFC , где M – середина отрезка BC .



Объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$. Для того, чтобы объём

пирамиды был наибольшим, необходимо, чтобы площадь основания пирамиды и высота были наибольшими. Из всех четырёхугольников, вершины которых лежат на

окружности, наибольшую площадь будет иметь квадрат. Этот четырёхугольник состоит из двух прямоугольных треугольников. Пусть сторона $AD = x$, тогда $\cos(\frac{10\pi}{15}) = -0,5 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = -0,5$, где R - радиус сферы. Площадь треугольника ADC

$$S(x) = \frac{x\sqrt{4R^2 - x^2}}{2}.$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{4R^2 - x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{4R^2 - x^2}})$$
 Решим уравнение $S'(x)=0 \Rightarrow 4R^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$.

$CD = R\sqrt{2}$. При этом значении x значение площади максимально, потому что производная меняет знак с плюса на минус. Этот треугольник прямоугольный и равнобедренный. Значит четырёхугольник квадрат. Расстояние от плоскости (высота пирамиды) основания до любой точки сферы не более радиуса R .

Максимально будет, если равно радиусу. Значит пирамида будет правильной четырёхугольной с высотой равной R . $OF = OD = OC = OA = OB = R$. $FC = R\sqrt{2}$.

$$MC = \frac{R\sqrt{2}}{2}, MF = \sqrt{(FC)^2 - (MC)^2} = \sqrt{2R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2},$$
 МК перпендикулярна АС. У

квадрата BD и AC перпендикулярны, значит $MK \parallel BO$, т.е. MK средняя линия треугольника CBO . $MK = R/2$. KF – проекция MF на плоскость AFC , по условию задачи нам необходимо найти косинус угла MFK . Найдём KF .

$$KF = \sqrt{(FM)^2 - (MK)^2} = \sqrt{\frac{6R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}. \cos \angle KFM = \frac{KF}{FM} = \frac{R\sqrt{5}}{2} : \frac{R\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

C5 Даны два уравнения:

$$\frac{x^4 + 4(6-x) + (p^2 - 11p + 38)}{x^2 - p} = x^2 + p - 4 \text{ и } 4\cos(\frac{\pi x}{x+5}) = (4 + \sqrt{p-1})x - 42.$$

Значение параметра p выбирается так, что $p \geq 1$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p - 1$ даёт число различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение:

$$\frac{x^4 + 4(6-p)x + (p^2 - 11p + 38)}{x^2 - p} = x^2 + p - 4 \Rightarrow x^4 + 4(6-x) + (p^2 - 11p + 38) = (x^2 - p)(x^2 + p - 4) \Rightarrow$$

$$x^4 + 4(6-p)x + p^2 - 11p + 38 - x^4 - px^2 + 4x^2 + px^2 + p^2 - 4p = 0 \Rightarrow 4x^2 + 4(6-p)x + 2p^2 - 15p + 38 = 0 \Rightarrow$$

Для выяснения числа корней уравнения необходимо найти дискриминант

$$\text{уравнения. } \frac{D}{4} = 4(6-p)^2 - 8p^2 + 60p - 152 = -4p^2 + 12p - 8 = -4(p^2 - 3p + 2) = -4(p-1)(p-2)$$

$$\text{Если } \frac{D}{4} = 0, \text{ уравнение имеет один корень } -4(p-1)(p-2) = 0, p = 1, p = 2.$$

Если $p = 1$, число различных корней первого уравнения 1 и сумма 1 и $p - 1$ равна 1. Получим второе уравнение

$$4\cos(\frac{\pi x}{x+5}) = (4 + \sqrt{p-1})x - 42. \Rightarrow 4\cos(\frac{\pi x}{x+5}) = 4x - 42 \Rightarrow \cos(\frac{\pi x}{x+5}) = x - 10,5$$

Уравнение имеет решение, если $-1 \leq x - 10,5 \leq 1 \Rightarrow 9,5 \leq x \leq 11,5 \Rightarrow x = 10$.

$\cos(\frac{10\pi}{15}) = -0,5 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = -0,5$. Число корней уравнения равно 1.

Если $p = 2$, число различных корней первого уравнения 1 и сумма 1 и $p - 1$ равна 2.

Получим второе уравнение $\cos(\frac{\pi x}{x+5}) = 1,25x - 10,5$

Уравнение имеет решение, если $-1 \leq 1,25x - 10,5 \leq 1 \Rightarrow 9,5 \leq 1,25x \leq 11,5 \Rightarrow 7,6 \leq x \leq 9,2$.

Если значение x изменяется от 7,6 до 9,2 то значения функции меняются от

$\cos(\frac{7,6\pi}{12,6}) = \cos(0,6\pi)$ до $\cos(\frac{9,2\pi}{14,2}) = \cos(0,65\pi)$ т. е. функция монотонно убывает

значения функции близки к оси ОХ и отрицательны. Значения $y = 1,25x - 10,5$ изменяются при изменении x от 7,6 до 9,2 следующим образом $y(7,6) = 1,25 \cdot 7,6 - 10,5 = -1$; $y(9,2) = 1,25 \cdot 9,2 - 10,5 = 1$. Значит функции имеют одну точку пересечения, т.е. один корень, число корней по условию должно быть два. Условие не подходит.

Дискриминант первого уравнения больше нуля, если $p \in (1; 2)$. Натуральных значений для выбора p нет.

Записать ответ $x = 10$.

Можно посмотреть графики второго уравнения при различных значений p .

