A1 Внесите множитель под знак корня $a\sqrt[5]{3}$.

1) $a\sqrt[5]{3^5 a}$. 2) $\sqrt[5]{3a^5}$. 3) $\sqrt[5]{3a}$. 4) $\sqrt[5]{3a^6}$.

Решение $a\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{\grave{a}^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{3\grave{a}^5}$.

Верный ответ 2).

A2 Найдите значение выражения $\log_2 136 - \log_2 17$.

1) $\log_2 119$ 2) 8 3) 3 4) 4

Решение $\log_2 136 - \log_2 17 = \log_2 136:17 = \log_2 8 = 3$.

Верный ответ 3).

A3 Вычислите cos 210°.

1) 0,5 2) -0,5 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение cos 210° = cos(180°+30°)= - cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Верный ответ 4).

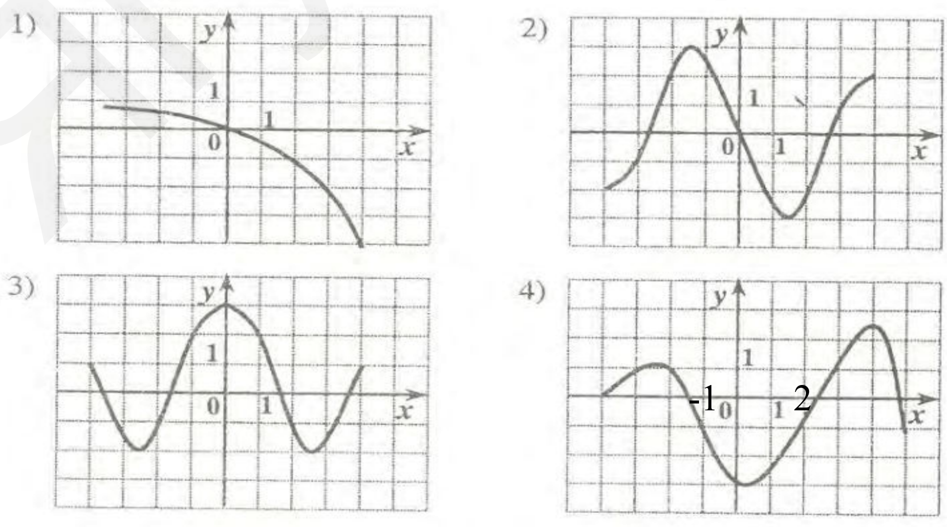
A4 Упростите выражение $\frac{5+b^{\frac{1}{2}}}{25-b}$.

1) $\frac{1}{5-b^{\frac{1}{2}}}$ 2) $\frac{1}{5+b^{\frac{1}{2}}}$ 3) $5b^{\frac{1}{2}}$ 4) $5-b^{\frac{1}{2}}$

Решение $\frac{5+b^{\frac{1}{2}}}{25-b} = \frac{5+b^{\frac{1}{2}}}{(5-b^{\frac{1}{2}})(5+b^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{5-b^{\frac{1}{2}}}$.

Верный ответ 1).

A5 Укажите рисунок, на котором изображен график функции, принимающей на промежутке (-1; 2) только отрицательные значения.



Функция принимает отрицательные значения, если график функции расположен ниже оси OX. На промежутке (-1; 2) такой график на рисунке 4).

Верный ответ 4).

A6 Найдите наименьшее значение функции y = sin 3x – 6.

1) -5 2) -7 3) -9 4) $-6\frac{1}{3}$

Решение -1≤ sin 3x ≤ 1 => -1 – 6 ≤ sin 3x – 6 ≤ 1 – 6 => - 7 ≤ sin3x – 6 ≤ - 5.
Из этого делаем вывод, что наименьшее значение – левое значение промежутка т.е. -7.
Верный ответ 2).

A7 Какому промежутку принадлежит корень уравнения
$\log_2(5x)=\log_2 21 - \log_2 3$?

1) (0; 1) 2) (1;2) 3) (2; 4) 4) (4; 5)

Решение $\log_2(5x)=\log_2 21 - \log_2 3 \Rightarrow \log_2(5x) = \log_2 \frac{21}{3} \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = 1\frac{2}{5}$.

$1\frac{2}{5} \in (1;2)$.

Верный ответ 2).

A8 Укажите функцию, убывающую на всей области определения

1) $y = 0{,}2^x$ 2) $y = (\frac{7}{3})^x$ 3) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ 4) $y = 7{,}5^x$

Показательная функция вида $y = a^x$ является убывающей, если $0 < a < 1$. Из данных функций таким свойством обладает $y = 0{,}2^x$.
Верный ответ 1).

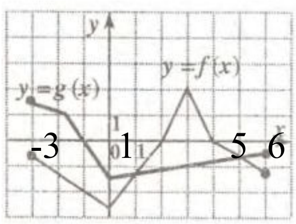
A9 Найдите производную функции $y = 3x^2\cos x$.

1) $y' = -6x\sin x$
2) $y' = 6x\cos x - 3x^2\sin x$
3) $y' = x^3\cos x + 3x^2\sin x$
4) $y' = 6x\cos x + 3x^2\sin x$

Решение $y' = (3x^2\cos x)' = (3x^2)'\cos x + 3x^2(\cos x)' = 6x\cos x + 3x^2(-\sin x) = 6x\cos x - 3x^2\sin x$.
Верный ответ 2).

A10 На рисунке изображены графики функций y =f(x) и y = g(x), заданных на промежутке [-3; 6]. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство f(x)≤g(x)/

1)[-3; 1]∪[5; 6]
2) [-3; 2] ∪[4; 6]
3) [1; 5]
4) [-1; 4]



Решение $f(x) \le g(x)$, если множество значений x при которых график функции $y = f(x)$ находится под графиком $y = g(x)$. Такие значения соответствуют ответу $[-3; 1]\cup[5;6]$

Верный ответ 1).

A11 Укажите значения аргумента, при которых значения функции $y = \log_{0,5}(x-4)$ больше -3.

1) $(-\infty; 12)$ 2) $(4; +\infty)$ 3) $(1; 4)$ 4) $(4; 12)$

Решение рассмотрим и решим неравенство $\log_{0,5}(x-4) > -3 \Rightarrow \log_{0,5}(x-4) > \log_{0,5}8 \Rightarrow 0 < x-4 < 8 \Rightarrow 4 < x < 12$.

Верный ответ 4).

A12 Укажите область определения функции $y=\sqrt[10]{1-7^{6-3x}}$.

1) $(-\infty; 3]$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $(1; +\infty)$

Решение. Найдѐм множество значений x при которых функция имеет смысл. Квадратный корень существует, если выражение под корнем больше или равно нулю. Значит

$y=\sqrt[10]{1-7^{6-3x}}$. $1 - 7^{6-3x} \ge 0 \Rightarrow 7^{6-3x} \le 7^0 \Rightarrow 6 - 3x \le 0 \Rightarrow 3x \ge 6 \Rightarrow x \ge 2$.

Верное решение 2).

A13 Решите уравнение $\cos10x + 2\sin^2 5x = 2\cos x$.

1) $(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

2) $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

3) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

4) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos10x + 2\sin^2 5x = 2\cos x \Rightarrow \cos^2 5x - \sin^2 5x + 2\sin^2 5x = 2\cos x \Rightarrow \cos^2 5x + \sin^2 5x = 2\cos x \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Верный ответ 4).

A14 Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки M этой прямой изменяется по закону $S(t) = t^2 + 5t + 4$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения скорость тела будет равна 15 м/с?

1) 10 2) 129 3) 5 4) 304

Скорость будем искать как производную пути по времени

$v(t) = S'(t) = 2t + 5$. Решим уравнение $2t + 5 = 15 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$.

Верный ответ 3).

B1

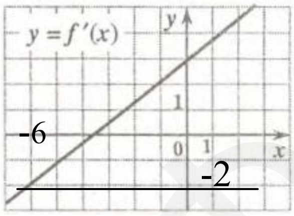
Найдите значение выражения $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin 2x$, если $\sin 2x = 0{,}75$.

Решение: $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 2\sin 2x = 1 + \sin 2x - 2\sin 2x = 1 - \sin 2x = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Записать ответ 0,25.

B2

К графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой x_0 проведена касательная, угловой коэффициент которой равен -2. На рисунке изображен график производной этой функции. Найдите x_0.



Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной в этой точке

т.е. равно -2.

Значение производной равно -2 при $x_0 = -6$

Записать ответ -6.

B3

Решите уравнение $\sqrt[3]{0{,}1^x\sqrt{0{,}001\cdot 0{,}01^x}} = 0{,}1^{-1}$.

Решение: Возведѐм обе части уравнения в куб:

$0{,}1^x\sqrt{0{,}1^3\cdot 0{,}1^{2x}} = 0{,}1^{-3} \Rightarrow \sqrt{0{,}1^{2x+3}} = 0{,}1^{-3-x}$. Возведѐм в квадрат:

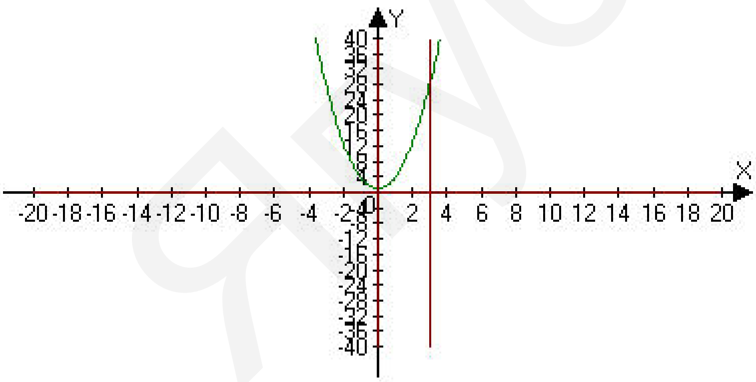
$0{,}1^{2x+3} = 0{,}1^{-2(3+x)} \Rightarrow 2x+3 = -2(3+x) \Rightarrow 4x = -9 \Rightarrow x = -2{,}25$.

Записать ответ -2,25.

B4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x^2+1$; $x=0$; $x=3$ и $y=0$.

Построим графики этих функций.



$x=0$, $y = 1$; $x=3$, $y=28$

Площадь фигуры можно найти по формуле $S = \int_0^3 (3x^2+1)dx = \left(\frac{3x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 = 27 + 3 = 30.$

Записать ответ 30.

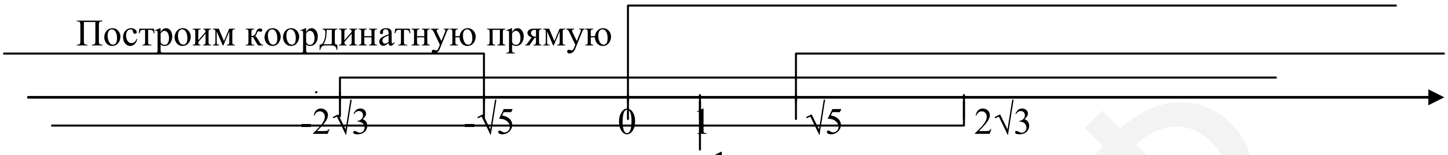
B5

Найдите произведение всех целых чисел, принадлежащих области определения функции $y = \log_x(7 - |12 - x^2|)$.

Для нахождения области определения логарифма нужно решить систему вида:

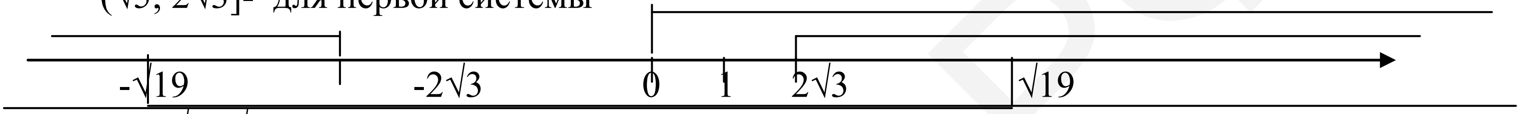
$$\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ 7-|12-x^2|>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 12-x^2\geq 0, \\ 7-(12-x^2)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 12-x^2<0, \\ 7-(-12+x^2)>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})>0, \\ (x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})>0, \\ x^2-19<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим координатную прямую



1 – исключена.

(√5; 2√3]- для первой системы



(2√3; √19) - для второй системы.

Решение системы (√5; √19)
Целые числа входящие в решение 3,4 => 3*4 = 12.
Записать ответ 12.

В6

Найдите наибольшее значение функции у = $\frac{6}{\sqrt{x}+3^x}$.

Область определения функции [0; +∞).
Решение Функция будет иметь наибольшее решение, если знаменатель будет принимать наименьшее значение. Исследуем функцию f(x) = $\sqrt{x}+3^x$ на минимум.
Функция √x имеет наименьшее значение при x = 0, при отрицательных она не существует и возрастает при положительных значениях. Показательная функция возрастающая, значит для области определения функции наименьшее значение знаменателя при x = 0, а функция принимает наибольшее значение.
Найдѐм это значение у(0) = $\frac{6}{0+1}=6$.

Записать ответ 6.

В7*

В комиссионном магазине цена выставленного на продажу товара каждый месяц уменьшается на 20% от предыдущей цены. Куртка была выставлена на продажу по цене 2000 рублей. Сколько раз снижалась цена куртки, если она была продана за 1024 рубля?
Решение: Если первоначальная цена ***а*** и ежемесячное снижение на **р%** , то получим последовательность:
а, а(1-0,01р), а(1-0,01р)^2, *а(1-0,01р)*^{3} *и* т.д.

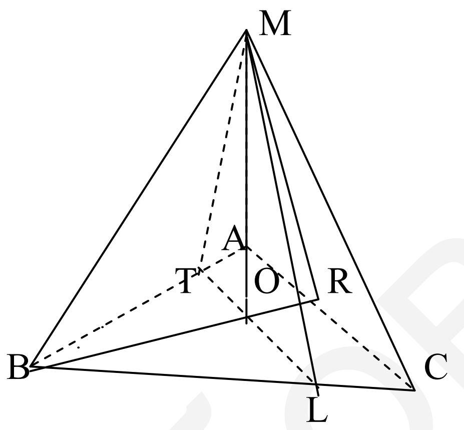
Напишем уравнение 2000(1-0,2)^n=1024 =>

$$\left(\frac{8}{10}\right)^n=\frac{1024}{2000}\Rightarrow\left(\frac{8}{10}\right)^n=\frac{512}{1000}\Rightarrow\left(\frac{8}{10}\right)^n=\left(\frac{8}{10}\right)^3\Rightarrow n=3$$

Записать ответ 3.

B8*

Секущая плоскость проходит через вершину M правильной треугольной пирамиды MABC, пересекает ребро AB в точке T и параллельна прямой AC. Найдите площадь сечения, если AT:TB =1:2, Высота пирамиды 3, а угол между плоскостью основания и боковой гранью 30°.



Решение:

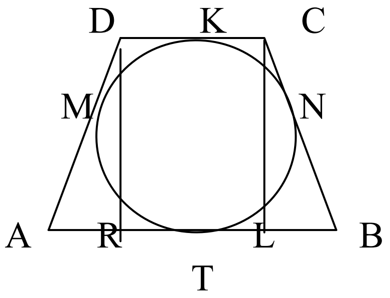
Плоскость сечения параллельна AC значит и TL параллельна AC . Тр. BLC подобен тр. BAC т.к. угол B общий, а ∠BAC = ∠BTL , ∠BLT = ∠BCA- углы с соответственно параллельными сторонами TL и AC. Значит TL проходит через точку пересечения высот, биссектрис и медиан треугольника ABC- это точка O. Значит MO = 3 т.к. высота правильной треугольной пирамиды проходит через центр основания треугольника. Найдѐм TL. В прямоугольном треугольнике MOR угол MRO = 30° по условию, значит MR = 2*MO=2*3=6. OR=$\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$. По свойству медианы OR=$\frac{1}{3}BR$, BR у равностороннего треугольника равна $\frac{BA\sqrt{3}}{2}$. В итоге получаем $3\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{BA\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BA=18$, AT:TB = 1: 2 => BT:BA = 2:3 BT=TL=LB, AB=BC=AC => $TL=\frac{2}{3}AC\Rightarrow TL=12.$ $S_{сеч.}=\frac{TL\cdot OM}{2}\Rightarrow S_{ñâ÷}=\frac{12\cdot 3}{2}=18.$

Записать ответ 18.

B9*

В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции точкой касания делится в отношении 1:3, высота трапеции равна $7\sqrt{3}$. Найдите большее основание трапеции.

Решение:



По условию CN:NB = 1:3. DR = CL – высоты трапеции. Трапеция равнобедренная DA=CB. Отрезки касательных, проведѐнные из точки касания между собой равны. Значит DM=DK=KC=CN=x, MA=AT=TB=BN=y. AB=2y, DC =2x LB=(AB-DC):2=(2y-2x):2=y-x. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \\ (7\sqrt{3})^2 + (y-x)^2 = (x+y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ 147 = 4x \cdot 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3{,}5, \\ y = 10{,}5 \end{cases}.$$ AB = 2y=2*10,5=21.

Записать ответ 21.

C1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(2x+4y-3) + \log_3(4x-1) = 2, \\ |1-4x| + |2x+4y-3| = 4x+5y-3. \end{cases}$$

2x+4y – 3 > 0, 4x – 1 > 0 – условия существования логарифма. Значит

$$\begin{cases} \log_3(2x+4y-3)(4x-1) = \log_3 9, \\ -(1-4x) + (2x+4y-3) - 4x - 5y + 3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+4y-3)(4x-1) = 9, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1, \\ (2x+8x-4-3)(4x-1) = 9. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x-1, \\ (10x-7)(4x-1) - 9 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1, \\ 20x^2 - 19x - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x+1, \\ D = 361+80 = 441, x_1 = \frac{19+21}{40}, x_2 = \frac{19-21}{40} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{20}, \\ y_1 = 1, y_2 = -1\frac{1}{10} \end{cases}$$

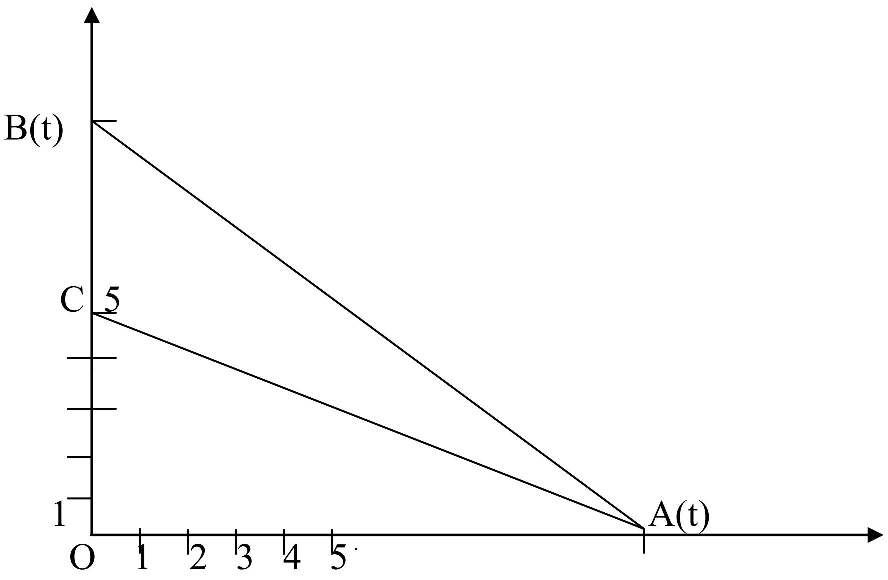
Из условия области определения логарифма 4x-1>0 => x>0,25

Решением будет пара (1;1).

C2

Точка А перемещается по оси Ох, а точка В перемещается по оси Оу. Абсцисса точки А изменяется по закону $x(t) = t^2 + 2t + 4$, а ордината точки В изменяется по закону $y(t) = t^2 - 6t + 17$, где $1{,}5 \le t \le 5{,}5$. Найдите наименьшее значение площади треугольника АВС, где точка С (0; 5).

Построим систему координат



Необходимо найти наименьшее значение площади треугольника ABC, при условии что точка C остаётся на месте, а A(t) изменяется от $1{,}5^2+3+4=9{,}25$ до $5{,}5^2+11+4=45{,}25$, а B(t) от 10,25 до 14,25. $S_{ABC}(t) = S_{OAB} - S_{OAC} = \frac{OA\cdot OB}{2} - \frac{OC\cdot O\grave{A}}{2} =$

$$= \frac{(t^2+2t+4)(t^2-6t+17)-5(t^2+2t+4)}{2} = \frac{(t^2-6t+12)(t^2+2t+4)}{2}.$$

Исследуем полученную функцию S(t) на экстремум. Найдѐм производную S(t)

$$S'(t) = \frac{(2t-6)(t^2+2t+4)}{2} + \frac{(t^2-6t+12)(2t+2)}{2} = t^3-3t^2+2t^2-6t+4t-12+t^3+t^2-6t^2-6t+12t+12 =$$

$$2t^3-6t^2+4t = 2t(t-1)(t-2).$$

Решим неравенство $2t(t-1)(t-2) > 0$ $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$

S′(t)	-	+	-	+
t		0	1	2

t= -1=> 2(-1)(-1-1)(-1-2)=-12

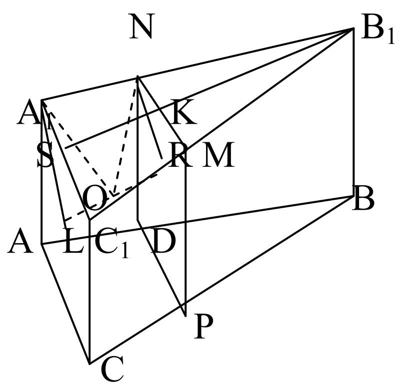
Значения t = 0, 1 не входят в область значений от 1,5 до 5,5 . Рассмотрим поведение функции возле точки 2. Производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в точке 2 функция принимает минимальное значение. Найдѐм значение площади треугольника

$S(2)=\frac{(4-12+12)(4+4+4)}{2}=24.$

Ответ: Площадь треугольника равна 24.

C3*

Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором AB = BC = 8, AC = 2. Высота призмы равна 2. Вершины A_1, A, C_1 и точка D ребра AB лежат на сфере. Найдите радиус этой сферы, если AD: DB = 1:3.



По условию задачи грань AA_1C_1C представляет собой квадрат. Точки AA_1C_1 лежат на сфере, это значит, что и точка C лежит на окружности, которая проходит через точки AA_1C_1. Центр сферы лежит внутри между плоскостью квадрата AA_1C_1C и плоскостью прямоугольника, который образован точками пересечения сферы со сторонами оснований призмы, сфера также проходит через эти точки на рѐбрах A_1B_1, B_1C_1, BC, которые делят эти рѐбра в таком же отношении 1:3. Найдѐм расстояние между плоскостями окружностей грани A_1C_1CA и квадрата MNPD. Это расстояние равно OR = SK. Треугольники A_1B_1S и NB_1M подобны AS││NK угол AB_1S – общий. $A_1N:NB_1=AD:DB=1:3$=> x+3x=8 => x =2, $A_1N=2$, $NB_1 = 6$. $A_1S=SC_1$- треугольник $A_1B_1C_1$ - равнобедренный

$$\frac{B_1A_1}{A_1S}=\frac{8}{1}=\frac{B_1N}{NK}=\frac{6}{NK}\Rightarrow NK=\frac{3}{4}\Rightarrow NM=1{,}5, SB_1=\sqrt{B_1A_1^2-A_1S^2}=\sqrt{64-1}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

$$KB_1=\sqrt{NB_1^2-NK^2}=\sqrt{36-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7\cdot 81}{16}}=\frac{9\sqrt{7}}{4}\Rightarrow LR=SK=3\sqrt{7}-\frac{9\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$OA_1=ON=R$ равны как радиусы сферы. Треугольники A_1LO и ORN прямоугольные и

$$LR=\sqrt{OA_1^2-A_1L^2}+\sqrt{ON^2-RN^2}\ (1)$$

NR – половина диагонали прямоугольника NMPD NR=$\sqrt{\left(\frac{MP}{2}\right)^2+NK^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+1}=\frac{5}{4}$

AL половина диагонали квадрата A_1C_1CA, AL=$\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2}$

Из (1) получим уравнение

$$\sqrt{R^2-2}+\sqrt{R^2-\frac{25}{16}}=\frac{3\sqrt{7}}{4}\Rightarrow$$

$$(\sqrt{R^2-2}+\sqrt{R^2-\frac{25}{16}})^2=(\frac{3\sqrt{7}}{4})^2\Rightarrow 2R^2+2\sqrt{(R^2-2)(R^2-\frac{25}{16})}-\frac{57}{16}=\frac{63}{16}\Rightarrow (R^2-2)(R^2-\frac{25}{16})=(\frac{15}{4}-R^2)^2\Rightarrow$$

$$R^4-\frac{57R^2}{16}+\frac{25}{8}=\frac{225}{16}-\frac{15R^2}{2}+R^4\Rightarrow\frac{63R^2}{16}=\frac{175}{16}\Rightarrow R^2=\frac{7\cdot 25}{7\cdot 9}\Rightarrow R=\frac{5}{3}$$

Ответ радиус сферы R = $\frac{5}{3}$.

C4

Найдите все положительные значения параметра a, при которых множество решении неравенства $a^{ax^2+4x}\cdot 4^{1,5x-6}\le 8^{(a+1)x}$ содержит числа, меньшие чем -0,25, но не содержит числа, большие чем 1.

Решение:

$$a^{ax^2+4x}\cdot 4^{1,5x-6}\le 8^{(a+1)x}\Rightarrow a^{ax^2+4x}\le\frac{2^{3x(a+1)}}{2^{3x-12}}\Rightarrow a^{ax^2+4x}\le 2^{3xa+12}\Rightarrow a^{x(ax+4)}\le 8^{ax+4}\Rightarrow\left(\frac{a^x}{8}\right)^{ax+4}\le 1\Rightarrow$$

$$(2^{x\log_2 a-3})^{ax+4}\le 1\Rightarrow (x\log_2 a-3)(ax+4)\le 0.$$

Решим методом интервалов

$$\frac{3}{\log_2 a}=1\Rightarrow a=2^3=8,$$

6(x – 1)(8x + 4)≤0 Ответ: [-0,5; 1]- решение

$$-\frac{4}{8}=-0,5$$

Если возьмѐм значение a меньше чем 8, но больше 1, то значение $\frac{3}{\log_2 a}>1$

Значит среди решений будут значения больше, чем 1. Минимальное значение среди значений параметра равно 8. Найдѐм максимальное. Левая граница промежутка не может быть больше, чем -0.25, иначе среди решений не будет чисел меньших или равных -0.25, решим уравнение: $-\frac{4}{a}=-0.25\Rightarrow a=16.$ Если будем брать значения больше чем 16, то среди решений не будут меньше или равно -0.25. Первое решение [8;16].

Рассмотрим случай 0 < a < 1. Пусть $\frac{3}{\log_2 a}=-0.25\Rightarrow \log_2 a=-12\Rightarrow a=2^{-12}$

Рассмотрим неравенство(-12x-3)(2^{-12}x+4) ≤ 0

По аналогии решение будет промежуток (-∞;-2^{14}]∪[-0,25+∞). Есть значения меньшие, чем -0,25 и большие чем 1.Если возьмѐм значения a меньше, чем 2^{-12}, то получим похожий результат. Пусть a = 2^{-1}. Получим неравенство

(-x-3)(0,5x+4)≤0. Получим значения меньшие 0,25, но будет присутствовать и значения больше чем 1. при 0 < a <1 решений нет.

Ответ $a\in[8;16]$.