A1 Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4}$.

1) 24 2) 6 3) 36 4) $4\sqrt{3}$

$\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4} = \sqrt[6]{3^{7+5} \cdot 4^{5+1}} = 3^{\frac{12}{6}} \cdot 4^{\frac{6}{6}} = 3^2 \cdot 4 = 36.$

Верный ответ 3).

A2 Найдите значение выражения $\dfrac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4} + \dfrac{4 \cdot y^{0,5}}{y-16}$ при $y = 18.$

1) $9 \cdot (4 + 3\sqrt{2})$ 2) $-\dfrac{1}{9}$ 3) 9 4) $4 + 3\sqrt{2}$

$$\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4} + \frac{4 \cdot y^{0,5}}{y-16} =$$

$$= \frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4} + \frac{4y^{0,5}}{(y^{0,5}+4)(y^{0,5}-4)} = \frac{y^{0,5}(y^{0,5}-4)+4y^{0,5}}{(y^{0,5}+4)(y^{0,5}-4)} = \frac{y-4y^{0,5}+4y^{0,5}}{y-16} = \frac{y}{y-16} = \frac{18}{18-16} = 9.$$

Верный ответ 3).

A3 Укажите значение выражения $2\log_2 3 + \log_2 \dfrac{1}{3}$.

1) -2 2) $2\log_2 3$ 3) 0 4) $\log_2 3$

$2\log_2 3 + \log_2 \dfrac{1}{3} = \log_2 3^2 + \log_2 3^{-1} = \log_2 3^{2-1} = \log_2 3.$

Верный ответ 4).

A4 Упростите выражение $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\sin\alpha}$.

1) 1 2) $\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ 3) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$ 4) $1 + \sin\alpha$

$$\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 1.$$ Верный ответ 1).

A5 Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{0,5x-1} = 9.$

1) $[-2; -1)$ 2) $[3; 5)$ 3) $[1; 3)$ 4) $[-1; 1)$

$\left(\dfrac{1}{27}\right)^{0,5x-1} = 9 \Leftrightarrow (3^{-3})^{0,5x-1} = 3^2 \Leftrightarrow 3^{-1,5x+3} = 3^2 \Leftrightarrow -1,5x+3 = 2 \Leftrightarrow -1,5x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}.$

$\dfrac{2}{3} \in [-1;1).$ Верный ответ 4).

Дубов.рф

А6 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(6-0{,}3x) > -1$.

1) $(-10; +\infty)$ 2) $(-\infty; -10)$ 3) $(-10; 20)$ 4) $(-0{,}1; 20)$

$$\log_{\frac{1}{9}}(6-0{,}3x) > -1. \Leftrightarrow \begin{cases} 6-0{,}3x > 0, \\ 6-0{,}3x < (\frac{1}{9})^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}3x > -6, \\ -0{,}3x < 9-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 20, \\ x > -10. \end{cases} \text{x} \in (-10;20)$$

Верный ответ 3).

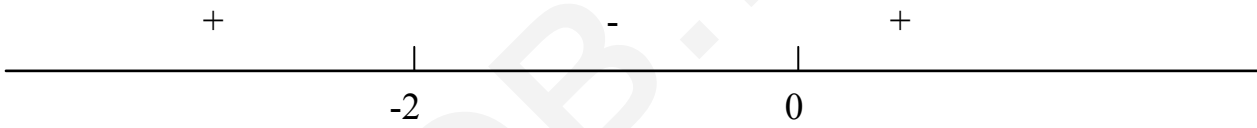
А7 Найдите область определения функции $y = \sqrt[4]{1-7^{x^2}\cdot 49^x}$.

1) $[-2; 2]$ 2) $[0; 2]$ 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ 4) $[-2; 0]$

Выражение под корнем должно быть неотрицательным, значит

$$1-7^{x^2}\cdot 49^x \geq 0 \Leftrightarrow 7^{x^2}\cdot 7^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow 7^{x^2+2x} \leq 7^0 \Leftrightarrow x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \leq 0.$$

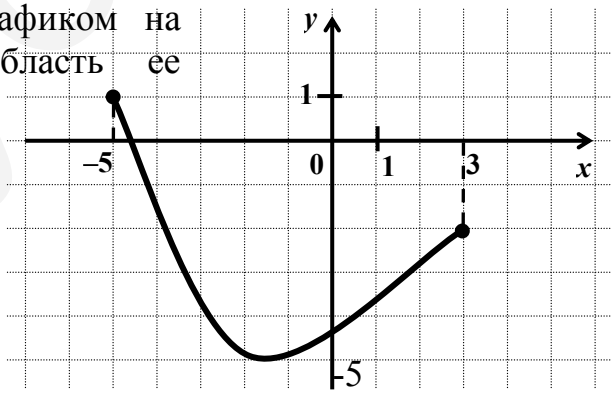
Решаем методом интервалов



Значит x $\in$[-2; 0].
Верный ответ 4).

А8

Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-5; 3]$. Укажите область ее значений.



1) $[-5; 1]$
2) $[1; -2) \cup (-2; -5]$
3) $(-2; 1]$
4) $[1; -2]$

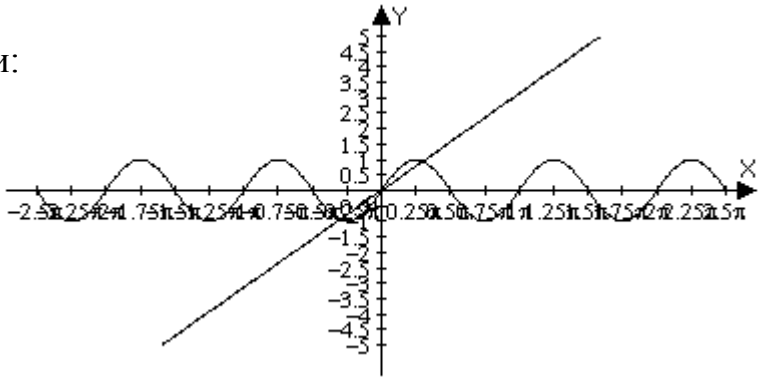
Область значений - это множество значений оси ОУ, которые принимает функция между наибольшим и наименьшим значением.
В данном случае это точки между значениями - 5 и 1. Значит Y =[-5; 1].
Верный ответ 1).

А9 Найдите произведение корней уравнения $\sin 2x = x$.

1) 0 2) $-\frac{\pi^2}{36}$ 3) $-\frac{\pi^2}{16}$ 4) корней нет

Ягубов.рф

Можно решить графически:

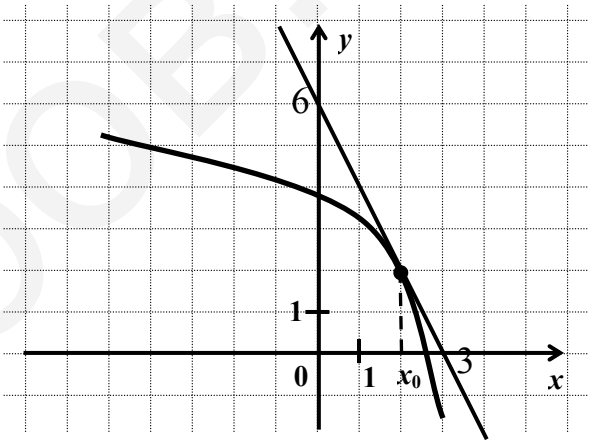


Из полученного графика можно сделать вывод, что произведение корней равно: 0. Из приведѐнных ответов подходит только 0.

Верный ответ 1).

A10 На рисунке изображѐн график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

1) – 2
2) 2
3) 3
4) 6



Значение производной в точке x_0 равно тангенсу наклона касательной, проходящей через точку графика с данной абсциссой. Касательная пересекает ось ОХ в точке (3;0), а ось ОУ в точке (0;6). Значение тангенса равно $-\frac{6}{3} = -2$. Минус, потому что угол тупой. Верный ответ 1).

Ягубов.рф

A11 Найдите значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

1) $\pi^2 - 1$ 2) $2\pi + 1$ 3) 2π 4) $2\pi - 1$

$y_x' = (x^2 + \sin x)' = 2 \cdot x + \cos x$. $y'_x(\pi) = 2 \cdot \pi + \cos \pi = 2\pi - 1$.
Верный ответ 4).

A12 Укажите первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

1) $F(x) = 2 - \cos x$
2) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$
3) $F(x) = x^2 + \cos x$
4) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x$

Первообразная F(x) функции f(x) есть функция из приведѐнных, производная которой есть f(x). Такая функция $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x$, потому что

$F'(x) = (\frac{x^2}{2} + \sin x)' = \frac{2x}{2} + \cos x = x + \cos x.$
Верный ответ 4).

A13 Решите уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$.

1) корней нет

2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5 <=> -\cos 2x = 0{,}5 <=> 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z <=> x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$
Верный ответ 4).

ЯГУОВ.РФ

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части будет некоторое число. Это число надо записать в <u>бланк ответов</u> рядом с номером задания (B1 – B9), начиная с первой клеточки. Каждую цифру пишите в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно. Если ответ получился в виде дроби, то ее надо округлить до ближайшего целого числа.

B1 Найдите максимум функции $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-2\frac{1}{3}$.

Если производная функции равна нулю, то в этой точке возможен максимум.

Найдѐм точки, в которых производная равна нулю.

$y_x' = (\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-2\frac{1}{3})' = \frac{3x^2}{3}+\frac{2x}{2}-2 = x^2+x-2.$

$x^2+ x - 2 = 0 <=> \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1 \end{array}\right.$

Посмотрим поведение функции на координатной оси:



Точка, в которой производная функции меняет свой знак с плюса на минус будет точкой максимума функции - это точка с координатой -2.

Найдѐм максимум функции $y(-2) = -\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-2\frac{1}{3}=1$

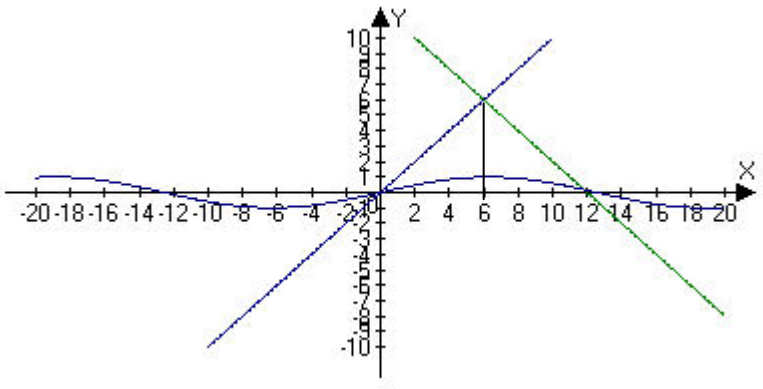
Верный ответ 1.

B2

Ягубов.рф

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = -x + 4\pi$, $y = \sin\frac{x}{4}$. (При вычислении число π считайте равным 3.)

Построим графики функций:



Площадь найдѐм по формуле S

$$= \int_0^6 (x - \sin\frac{x}{4})dx + \int_6^{12} (-x + 4\pi - \sin\frac{x}{4})dx = (\frac{x^2}{2} + 4\cos\frac{x}{4})|^6_0 + (-\frac{x^2}{2} + 4\pi x + 4\cos\frac{x}{4})|_6^{12} =$$

$$= \frac{36}{2} + 4\cos\frac{3}{2} - \frac{0}{2} - 4\cos\frac{0}{4} - \frac{144}{2} + 144 + 4\cos\frac{12}{4} + \frac{36}{2} - 72 - 4\cos\frac{3}{2} =$$

$$= 18 + 0 - 0 - 4 - 72 + 144 - 4 + 18 - 72 - 0 = 28.$$

Можно и так S= $\frac{12 \cdot 6}{2} - \int_0^{4\pi} \sin\frac{x}{4} = 36 + 4\cos\frac{x}{4}|_0^{4\pi} = 36 + 4(\cos\pi - \cos 0) = 36 - 8 = 28$

Получаем тот же ответ.

Записать 28.

B3 Сколько корней имеет уравнение $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\sqrt{25 - x^2} = 0$?

Произведение равно нулю, когда равен нулю хотя бы один из множителей.

$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0$ èëè $\sqrt{25 - õ^2} = 0$ Из первого получаем уравнение $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ или $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$. Из этих значений x можно взять только те , при которых выражение $25 - x^2$ больше или равно нулю, а это может быть, если

$x \in [-5;5]$

n	-2	-1	0	1	2
x	-6,28	-3,14	0	3,14	6,28

Два значения -5 и 5 также решения уравнения. Итого 5.

Записать ответ 5.

Studbob.ru

B4

При каком наибольшем значении *a* функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Функция возрастает, когда призводная функции на всей оси больше нуля.

Найдѐм производную

$$f'(x)=(\frac{2}{3}\tilde{o}^3-\grave{a}\tilde{o}^2+7\grave{a}\tilde{o}+5)'=\frac{2\cdot 3\tilde{o}^2}{3}-2\grave{a}\tilde{o}+7\grave{a}=2\tilde{o}^2-2\grave{a}\tilde{o}+7\grave{a}.$$

Решим неравенство $2x^2 - 2ax +7a > 0$. Найдѐм дискриминант $D = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4*2*7a = 4a^2 - 56a$. Если первый коэффициент квадратного уравнения положительный, а $D < 0$, то $f'(x)>0$. $4a(a - 14)<0 \Rightarrow 0 < a < 14$. Значит наибольшее значение *a* при котором производная положительна 14. Выражение производной будет $2x^2 -28x +98 = 2(x^2 -14x +49)=2(x-7)^2$, т.е. производная при значении $a = 14$ всегда больше нуля кроме $x = 7$. В этой точке функция имеет перегиб.

Записать ответ 14.

B5 Пусть (x_0, y_0) – решение системы $\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1. \end{cases}$

Найдите отношение $\frac{x_0}{y_0}$. $\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1. \end{cases} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+x-5=1, \text{åñëè} \tilde{o}\geq 5, \\ y+2=\sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6, \\ -x+8=\sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ x^2-16x+64-x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-17x+60=0, \\ y=-x+6 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x+5=1, \text{åñëè} x<5, \\ y+2=\sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-4, \\ x-2=\sqrt{x+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-4, \\ x^2-4x+4-x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x=0, \\ y=x-4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=5, \\ x_2=12 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y_1=1 \\ y_2=-6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y_1=-4, \\ y_2=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ягубов.рф

Из первого уравнения x≥-4 и y≥-2, т.к. подкоренное выражение и значения корня должны быть неотрицательными.
Из пар (5;1), (12;-6), (0;-4), (5;1) исключаем (0;-4).
Остальные проверим
(5;1): 1+2 $=\sqrt{5+4}$. - истинное высказывание.
(12;-6): -6+2= $\sqrt{12+4}$ - лишний корень, появился при возведении в квадрат уравнения.
(5;1): Такая пара уже есть и для второй системы она не подходит т.к. по условию x<5.

Найдѐм отношение $\frac{x_0}{y_0}=\frac{5}{1}=5.$

Записать в ответ 5.

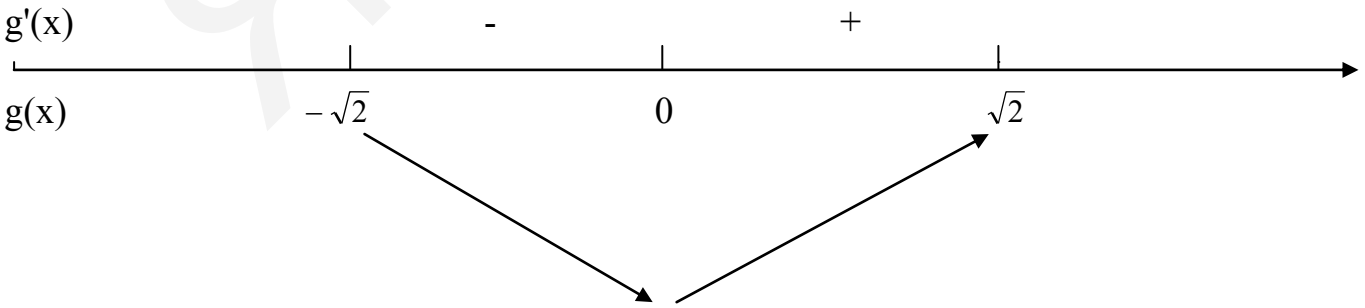
B6 Найдите значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$ т.к. функция y=arcsinx - нечѐтная, а $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Записать ответ 0.

B7 Найдите наименьшее значение функции $g(x) = \log_{0,5}(2-x^2)$.

Найдѐм область определения функции. Логарифмическая функция существует, при условии, что $2 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$
Найдѐм производную функции
$g'(x)=\frac{-2x}{(2-x^2)\ln 0{,}5}.$ Выясним как ведѐт себя производная и функция на области определения, для этого решим неравенство
$\frac{-2\tilde{o}}{(2-\tilde{o}^2)\ln 0{,}5}\prec 0.$ Решим методом интервалов, зная ln0,5<0.

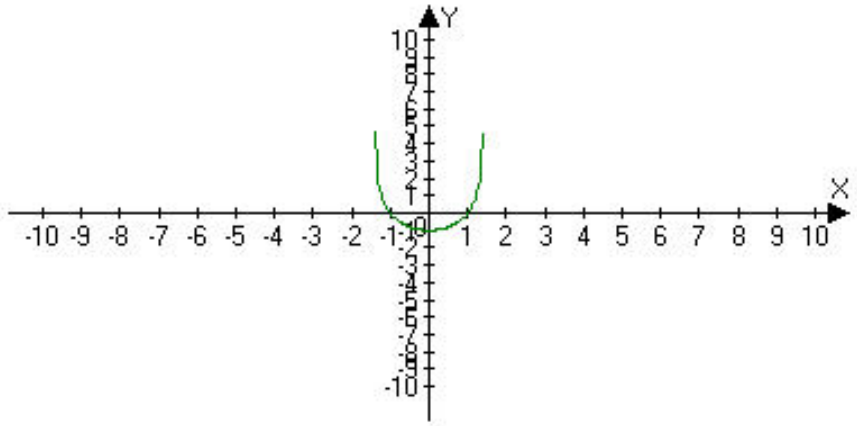


Значит наименьшее значение в точке x = 0.
Найдѐм это значение $g(0) = \log_{0,5}(2-0^2)=\log_{0,5}2=-1.$

Записать ответ: наименьшее значение функции - 1.

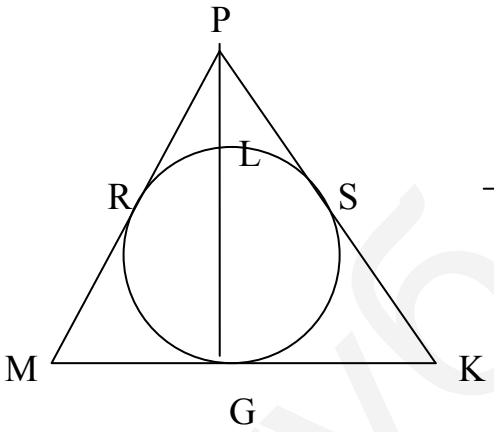
ЯУбов.РФ

Построим график для просмотра решения



B8

В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении 1:2, считая от вершины P. Найдите периметр треугольника PMK.



Дано:
r = $2\sqrt{3}$
PL:LG=1:2
Треугольник - равнобедренный

Найти периметр P

LG=2r, т.к.PG⊥MK,а так как MK касательная , то PG содержит диаметр окружности.

По условию PL:LG = 1:2 => $\frac{PL}{LG}+1=\frac{1}{2}+1\Rightarrow\frac{PL+LG}{LG}=\frac{3}{2}\ \ PG=\frac{3}{2}\cdot 2r\Rightarrow PG=3r.$

По свойству касательных к окружности PR=PS, MR=MG, KS = KG. Пусть PR=x, RM=y. Тогда, учитывая, что треугольник равнобедренный и PM=PK и MG=GK.

Периметр треугольника P = PM+MK+KP=x+y+y+y+y+x=2x+4y=2(x+2y).

Существует формула связи периметра, площади и радиуса вписанной окружности.

$p=\frac{S}{r},\ ãääp=\frac{P}{2}\ \Rightarrow P=\frac{2S}{r}$. Найдѐм площадь S=(MK*PG)/2=(2y*3r)/2.

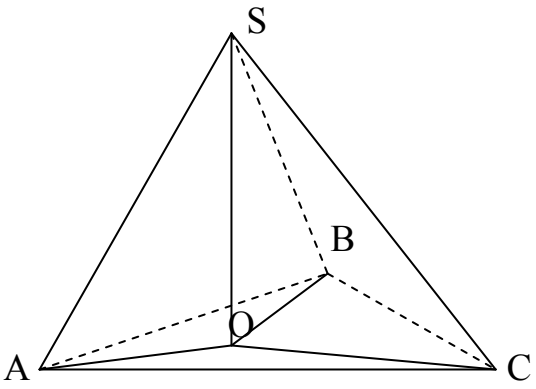
2(x+2y) $=\frac{2y\cdot 3r}{r}=6y\Rightarrow 2x+4y=6y\Rightarrow 2x=2y\Rightarrow x=y.$

Значит треугольник равносторонний со стороной 2x =*a* и высота треугольника PG равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}=3r\Rightarrow a=\frac{6r}{\sqrt{3}}=\frac{6r\sqrt{3}}{3}=2r\sqrt{3}=2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=12\Rightarrow P=3a=3\cdot 12=36.$

Записать ответ 36.

B9 В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 12 и 5. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Выполним для наглядности чертѐж задачи:



Дано:
AB=12, AC = 13, BC = 5
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = 45°$
Найти объѐм пирамиды V.

Объѐм пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot S_{îñí.} \cdot H.$

По условию задачи рѐбра пирамиды SA, SB, SC наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом в 45°. Получается, что прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны между собой по катету SO(общему для всех) и острому углу в 45°, следовательно равны и катеты AO=BO=CO, а значит точка O – центр окружности описанной около треугольника ABC. S0=OA=OB=OC т.к. прямоугольный треугольник с острым углом 45° - равнобедренный. Значит высота пирамиды равна радиусу описанной окружности, а радиус можно найти из формулы

$R = \frac{abc}{4S}$. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $ãäåð = \frac{à + â + ñ}{2}$. - формула Герона.

$p = (13+12+5)/2 = 15$

$S_{îñí.} = \sqrt{15(15-13)(15-12)(15-5)} = \sqrt{15 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10} = 30.$

$R = \frac{13 \cdot 12 \cdot 5}{4 \cdot 30} = 6{,}5 = H.$

$V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 6{,}5 = 65.$

Записать ответ 65.

Можно быстрее, т.к. треугольник в основании прямоугольный. $13^2 = 12^2 + 5^2$. Подумайте.

Часть 3

Для ответов на задания этой части (С1 – С3) используйте специальный бланк. Запишите сначала номер задания (С1 и т.д.), а затем запишите полное решение.

C1 Решите уравнение $32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$.

Ягубов РФ

Преобразуем : $(2^5)^{x+3} * 3^{3x+1} * (5^4)^{x+2} = (2^3 * 3 * 5^2)^{x+7} \Rightarrow$

При делении уравнения на значение не равное нулю получится равносильное уравнение.

$$\frac{2^{5\delta+15}\cdot 3^{3\delta+1}\cdot 5^{4\delta+8}}{2^{3\delta+21}\cdot 3^{\delta+7}\cdot 5^{2\delta+14}} = \frac{2^{3\delta+21}\cdot 3^{\delta+7}\cdot 5^{2\delta+14}}{2^{3\delta+21}\cdot 3^{\delta+7}\cdot 5^{2\delta+14}} \Rightarrow 2^{2\delta-6}\cdot 3^{2\delta-6}\cdot 5^{2\delta-6} = 1 \Rightarrow 30^{2\delta-6} = 1 \Rightarrow 2\delta - 6 = 0 \Rightarrow \delta = 3.$$

Правильный ответ x = 3.

C2 Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in [\text{arctg } 0{,}5;\ \text{arctg } 3]$.

Так как арктангенс является возрастающей функцией, то

$0 < \text{arctg}0{,}5 < \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4} < arctg3 < \frac{\pi}{2}$.

При возрастании x от arctg0,5 до $\frac{\pi}{4}$ аргумент 2x возрастает от 2arctg0,5 до $\frac{\pi}{2}$. Так как синус на таком промежутке возрастает, то функция y = sin2x меняется от sin(2arctg0,5) до 1. При этом все значения принимаются, так как синус непрерывная функция. При возрастании x от $\frac{\pi}{4}$ до arctg3 аргумент 2x возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до 2arctg3. Так как синус на таком промежутке убывает, то функция y = sin 2x меняется от 1 до sin(2arctg3). При этом все значения принимаются, так как синус - непрерывная функция.Используя формулу, выражающую синус через тангенс половинного угла, находим,что

$$\sin(2arctg0{,}5) = \frac{2tg(arctg0{,}5)}{1+tg^2(arctg0{,}5)} = \frac{2\cdot 0{,}5}{1+0{,}25} = \frac{1}{1.,25} = 0{,}8$$

$$\sin(2arctg3) = \frac{2tg(arctg3)}{1+tg^2(arctg3)} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Значит искомое множество значений - это объединение отрезков [0,8;1] и [0,6; 1], т.е. отрезок [0,6;1].
Ответ: [0,6;1].

C3 При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Запишем уравнение соответствующее данному высказыванию

$\log_a(\cos^2 x+1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1. \Rightarrow \log_a(\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5) = 1 \Rightarrow (\cos^2 x+1)(\cos^2+5) = a$
$\cos^2 x = t$, получим $t^2+6t+5-a=0$.

Clubов.РФ

Это уравнение имеет решение, если дискриминант уравнения больше или равен нулю. D = 36-4(5-*a*)=36-20+4*a* = 16 + 4*a*, D≥0 => 4*a* ≥ -16 => *a* ≥ - 4. И т.к. *a* основание логарифма то $a > 0$ *и* $a \neq 1$. Значит *a* принадлежит множеству: $(0;1) \cup (1;+\infty]$.
Напишем формулы корней квадратного уравнения
$t=-3 \pm \sqrt{4+a}$. Значение t может находится в промежутке [0;1]; т.к. $t = \cos^2 x$. Значит можно выбирать *a* из $t = -3+\sqrt{4+a}$
Минимальное значение, которое может принимать *a,* можно найти из неравенства
$0 \le -3+\sqrt{4+a} \le 1 \Rightarrow 3 \le \sqrt{4+a} \le 4 \Rightarrow 9 \le 4+a \le 16 \Rightarrow 5 \le a \le 12$.
Ответ: [5;12].

Ягубов.рф