

A1 Найдите значение выражения

$$2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha \quad \text{при } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

- 1) 0 2) $2 + \sqrt{3}$ 3) 3 4) $2 - \sqrt{3}$

$$2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha = 2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + 2\sin \alpha = 2 + 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Верный ответ 3).

A2

Упростите выражение $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}}{m^{-3}}.$

- 1) $9m^7$ 2) $9m$ 3) 9 4) $\frac{9}{m^6}$

$$\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}}{m^{-3}} = \frac{9m^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}}{m^{-3}} = 9m^{4 - (-3)} = 9m^7.$$

Верный ответ 1).

A3

Сократите дробь $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}.$

- 1) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ 3) $\frac{1}{x - y}$ 4) $x + y$

$$\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{y})^2} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}.$$

Верный ответ 2).

A4

Найдите значение $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.

- 1) -8 2) 10 3) 7 4) 25

$$\log_3(9b) = \log_3 9 + \log_3 b = \log_3 3^2 + 5 = 2\log_3 3 + 5 = 2 + 5 = 7.$$

Верный ответ 3).

A5

Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

- 1) $(-1)^{n-1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$3) \quad (-1)^{n-1} \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4) \quad (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Верный ответ 3).

A6 Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1) = \log_2(3x)$.

$$1) \quad (-\infty; -1)$$

$$2) \quad (-1; 0)$$

$$3) \quad [-1; 0]$$

$$4) \quad (0; +\infty)$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(3x) \Rightarrow x+1=3x \Rightarrow x-3x = -1 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = 0,5.$$

Корень входит в область определения логарифма, $x+1$ и $3x$ при $x = 0,5$ больше нуля. $0,5 \in (0; +\infty)$.

Верный ответ 4).

A7 Решите неравенство $5^{2-3x} - 1 \geq 0$.

$$1) \quad \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$$

$$2) \quad \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$$

$$3) \quad \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$4) \quad \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$5^{2-3x} - 1 \geq 0 \Rightarrow 5^{2-3x} \geq 5^0 \Rightarrow 2-3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}. \quad x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$$

Верный ответ 2).

A8 Решите неравенство $\frac{x(x+3)}{2-x} \geq 0$.

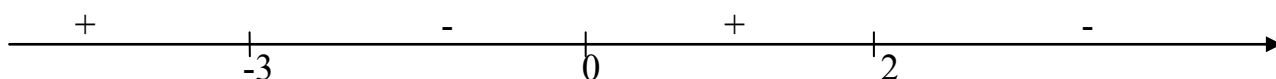
$$1) \quad (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$$

$$2) \quad [-3; 2)$$

$$3) \quad (-\infty; -3) \cup [0; 2)$$

$$4) \quad (-\infty; -3] \cup [0; 2)$$

$$\frac{x(x+3)}{2-x} \geq 0. \text{ Решаем методом интервалов.}$$



$x \in (+\infty; -3] \cup [0; 2)$. Число 2 не включается т.к. при этом значении знаменатель обращается в ноль.

Верный ответ 4).

A9

Укажите промежуток, которому принадлежат нули функции

$$f(x) = \sqrt{4-3x^2} - x.$$

1) $[-1; 1)$

2) $[1; \sqrt{2}]$

3) $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$

4) $(\sqrt{2}; 2]$

Нули функции, когда $f(x) = 0$.

$$f(x) = \sqrt{4-3x^2} - x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-3x^2} = x \Rightarrow 4-3x^2 = x^2 \Rightarrow -4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1.$$

Подходит только $x = 1$, потому что $f(-1) = 2$. $1 \in [1; \sqrt{2}]$.

Верный ответ 2).

A10

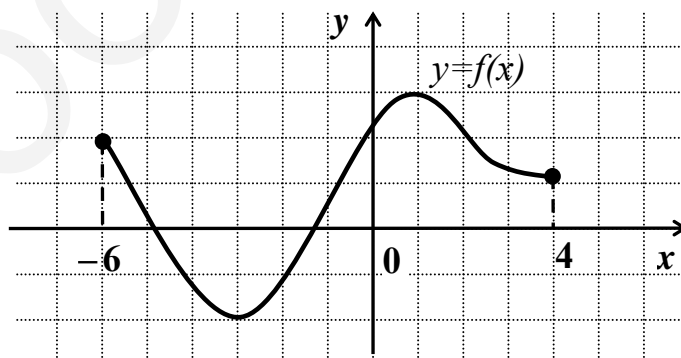
Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 4]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все точки экстремума.

1) $[-6; 0]$

2) $[0; 4]$

3) $[-2; 3]$

4) $[-3; 1]$



Экстремальные точки, это точки, где функции принимают значения минимума и максимума. У этой функции на данном промежутке минимум при $x = -3$, а максимум при $x = 1$. Значит все точки экстремума принадлежат промежутку $[-3; 1]$.

Верный ответ 4).

A11

Найдите область определения функции $y = \log_{0,3}(x - x^2)$.

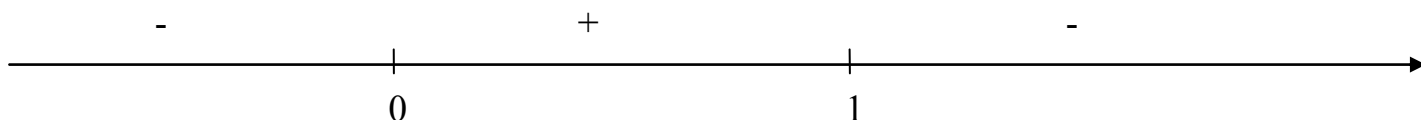
1) $[0; 1]$

2) $(0; 1)$

3) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Функция логарифма существует если выражение $x - x^2 > 0$.
 $x(1 - x) > 0$ Используем метод интервалов



Верный ответ 2).

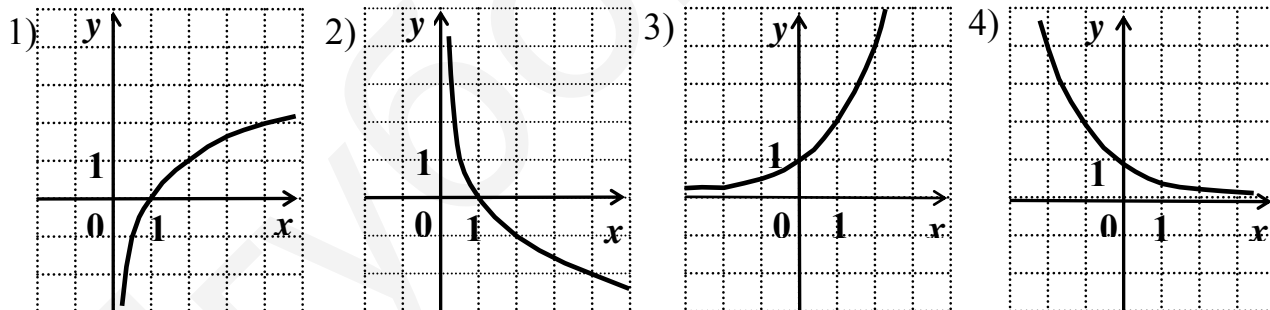
A12 Найдите множество значений функции $y = \sin x + 2$.

- 1) $[-1; 1]$ 2) $[0; 2]$ 3) $[1; 3]$ 4) $[2; 3]$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3.$$

Верный ответ 3).

A13 Укажите график функции, заданной формулой $y = 0,5^x$.



Функция должна быть убывающая и должна находится в верхней полуплоскости.

Верный ответ 4).

A14 Найдите значение производной функции $y = x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 1$.

- 1) $2e$ 2) e 3) $1 + e$ 4) $2 + e$

$$y' = (x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x \Rightarrow y'(1) = e + 1 \cdot e = 2e.$$

Верный ответ 1).

A15 Для функции $y = 2 \cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 24\right)$.

- 1) $Y = 2 \sin x + 24$
- 2) $Y = 2 \sin x + 22$
- 3) $Y = -2 \sin x + 26$
- 4) $Y = 2 \cos x + 22$

Первообразная для данной функции будет $F(x) = 2 \sin x + C$. График этой функции проходит через точку M , если выполняется условие.

$$24 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tilde{N} \Rightarrow 24 = 2 + \tilde{N} \Rightarrow \tilde{N} = 22. \text{ Получим } y = 2 \sin x + 22.$$

Верный ответ 2).

A16 При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ (t – время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

- 1) 1,75
- 2) 7,5
- 3) 3
- 4) 9

Скорость можно определить из соотношения $v(t) = S'(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1\right)' = t^2 - 2t + 1$.

$$V(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = 16 - 8 + 1 = 9.$$

Верный ответ 4).

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части будет некоторое число. Это число надо записать в бланк ответов рядом с номером задания (B1 - B10), начиная с первой клеточки. Каждую цифру и знак минус отрицательного числа пишите в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно. Если ответ получился в виде дроби, то ее надо округлить до ближайшего целого числа.

B1

Пусть $(x_0; y_0)$ - решение системы
$$\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0. \end{cases}$$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

Выразим y из второго уравнения $y = 3x - 11$ и подставим в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\sqrt{25 - 10x + x^2} + 3x - 11 = 4 \Rightarrow \sqrt{25 - 10x + x^2} = 15 - 3x, \begin{cases} 15 - 3x \geq 0 \\ 25 - 10x + x^2 = (15 - 3x)^2 \end{cases} \Rightarrow 25 - 10x + x^2 = 225 - 90x + 9x^2 \Rightarrow 8x^2 - 80x + 200 = 0$$

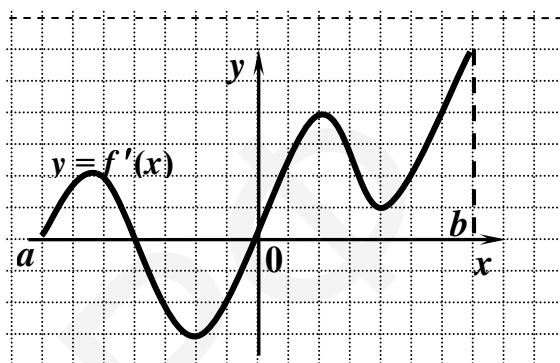
$$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5. y = 3 \cdot 5 - 11 = 4$$

Значит решение системы $x_0 = 5$ и $y_0 = 4$. $\Rightarrow x_0 \cdot y_0 = 20$.

Записать в ответ 20.

B2 Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. На рисунке изображен график ее производной $y = f'(x)$. Исследуйте на монотонность функцию $y = f(x)$.

В ответе укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.



Функция монотонно возрастает или убывает, если производная не меняет знак. Производная больше нуля на двух участках, а значит там функция монотонно возрастает.

Записать ответ 2.

B3 Найдите значение выражения $\log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right)$, если $\log_{\pi} \sqrt{a} = 3$, $\log_{\pi} b = 5$.

$$\log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right) = \frac{1}{2} (\log_{\pi} a^2 + \log_{\pi} b - \log_{\pi} \pi^3) = 0,5(2 \log_{\pi} a + \log_{\pi} b - 3 \log_{\pi} \pi) = 0,5(2 \cdot 6 + 5 - 3) = 7.$$

Т.к. из $\log_{\pi} \sqrt{a} = 3, \Rightarrow \log_{\pi} a = 6$.

Записать в ответ 7.

B4 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7}$.

Исследуем на минимум функцию $f(x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7 = \sin(2x + x) - 7 = \sin 3x - 7$, $|\sin 3x| \leq 1 \Rightarrow -1 - 7 \leq \sin 3x - 7 \leq 1 - 7 \Rightarrow -8 \leq f(x) \leq -6$.
Наименьшее значение, которое может принимать функция $f(x) = -8$, значит наименьшее значение $y = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Записать в ответ -2.

B5 Пусть x_0 – наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Решим уравнение $\cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 0$ Это уравнение однородное, приведём подобные и поделим на $\cos^2 x$, получим $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0$ ($\operatorname{tg} x = y$) $\Rightarrow 2y^2 - 5y + 3 = 0 \Rightarrow$

$$D = 25 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \quad y = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow (y_1 = 1,5, y_2 = 1).$$

$$\operatorname{tg} x = 1,5, \operatorname{tg} x = 1$$

Тангенс функция возрастающая, поэтому наименьшее значение x из двух, при $\operatorname{tg} x = 1$.

Ответ записать 1.

B6 При каком значении a функция $y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x = 4$?

$y = 2^{-x^2+ax+7}$. Исследуем функцию на максимум. Найдём производную.

$y' = (-2x + a) \cdot 2^{-x^2+ax+7} \ln 2 = 0 \Rightarrow -2x + a = 0 \Rightarrow a = 2x \Rightarrow a = 8$. Эта точка максимума, потому что при $x < 4$ $y' < 0$, а при $x > 4$ $y' > 0$, значит функция слева от точки $x = 4$ возрастает, а справа убывает. Точке $x = 4$ – максимум.
Записать в ответ 8.

B7 Владелец дискотеки имел стабильный доход. В погоне за увеличением прибыли он повысил цену на билеты на 25%. Количество посетителей резко уменьшилось, и он стал нести убытки. Тогда он вернулся к первоначальной цене билетов. На сколько процентов владелец дискотеки снизил новую цену билетов, чтобы она стала равна первоначальной?
(Знак % в ответе **не пишите**).

x - первоначальная стабильная прибыль владельца дискотеки. $x + 0,25x$ – прибыль после увеличения цены на билет. $1,25x - n \cdot 1,25x$ – новое изменение стоимости билета и результат изменения равен первоначальной стоимости т.е. x .

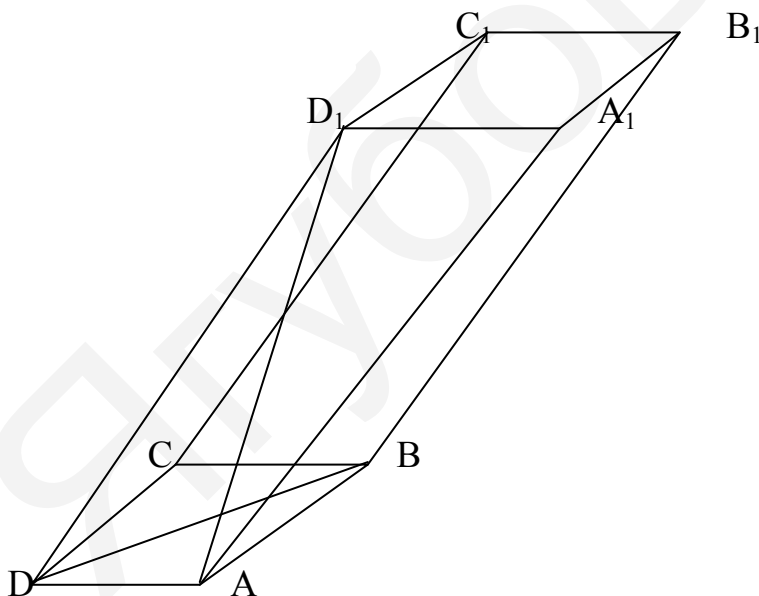
Напишем уравнение $1,25x - 1,25nx = x \Rightarrow 1,25(1-n) = 1 \Rightarrow 1 - n = 1:1,25 \Rightarrow n = 1 - 0,8 = 0,2$. Т.е. владелец дискотеки снизил билеты на 20 процентов.

В ответ записать 20.

B8 Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м^2 . Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м^2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если 1 коробки хватает на $1,2 \text{ м}^2$ пола, а для замены некачественных плиток понадобится 3 коробки?

Студенческая бригада будет работать $11 + 5 = 16$ дней. Скорость работы студентов росла по арифметической прогрессии с первым членом x и она будет иметь вид: $x + x + 2 + x + 4 + \dots + x + (16-1)2$. Найдём сумму прогрессии $S = (x + x + 30) \cdot 16/2 = 16(x + 15) = 288$ – выложили плиткой весь пол. Решим уравнение $x + 15 = 18 \Rightarrow x = 3$. За 11 дней работы студенты выложили $S_1 = (x + x + 20) \cdot 11/2 = (x + 10) \cdot 11 = 13 \cdot 11 = 143 \text{ м}^2$. Осталось $288 \text{ м}^2 - 143 \text{ м}^2 = 145 \text{ м}^2$. Для того что бы узнать количество коробок, нужно $145 : 1,2 + 3 = 123,83$ коробки т.е. 124 коробки понадобится для пола. Записать в ответ 124.

- В9** Дана призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Отрезок $D_1 A$ перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3} + 2)$.



$D_1 A$ перпендикулярен к плоскости основания значит $D_1 A \perp DA$ т.е. $D_1 A$ – высота параллелограмма $DD_1 A_1 A$, DA – проекция DD_1 на плоскость основания, значит угол между проекцией и наклонной равен 60° , аналогично $C_1 B$ перпендикулярен плоскости основания и угол $C_1 B$ равен тоже 60° , а Площадь грани $DCC_1 D_1$ равна

площади основания(квадрата) поделить на $\cos 60^\circ$ - формула связи площади фигуры и её проекции на плоскость. Пусть x – сторона квадрата, тогда $DD_1 = 2x$ – сторона квадрата лежит против угла в 30° в прямоугольном треугольнике DD_1A , DD_1 – гипотенуза. Значит $D_1A = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$. Составим на этом основании площадь боковой поверхности призмы.

$$S = 2(x \cdot x\sqrt{3} + \frac{x^2}{\cos 60^\circ}) = 2(x^2\sqrt{3} + 2x^2) = 6(\sqrt{3} + 2) \Rightarrow x^2 = \frac{3(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3} + 2} \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

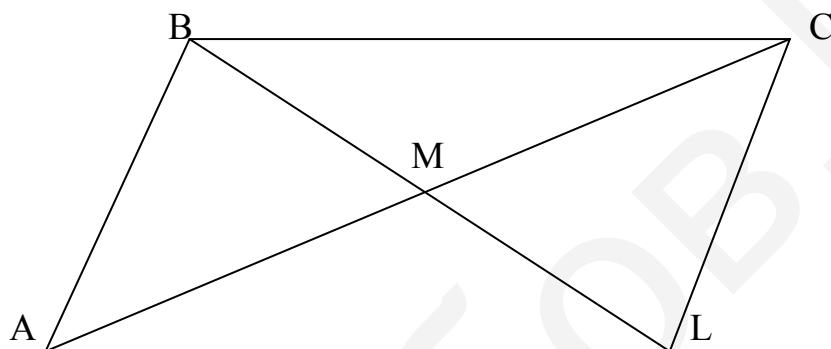
Умножили на 2, потому что противоположные грани призмы равны.

Итак $D_1A = \sqrt{3}\sqrt{3} = 3$.

Записать в ответ 3.

B10

Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC , если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC , а медиана BM равна 5.



Продолжим медиану BM и на продолжении отложим отрезок $ML = MB$, Отрезки AM и MC равны т.к. BM медиана треугольника ABC . Получили, что в четырёхугольнике $ABCL$ диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Центрально- симметричный четырёхугольник – параллелограмм, а у него площадь любой диагональю делится пополам. Значит $S_{ABC} = S_{BAL}$

$$\frac{1}{2} AB \cdot BL \cdot \sin \angle ABL = S_{ABC} \Rightarrow 0,5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin \angle ABL = 20\sqrt{3} \Rightarrow \sin \angle ABL = \frac{20\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Значит угол ABL равен 60° . По теореме косинусов $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 60^\circ = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 0,5 = 49 \Rightarrow AM = 7$. $AC = 2AM = 14$.

Записать в ответ 14.

Часть 3

Для записи ответов на задания этой части (C1 – C4) используйте специальный бланк. Запишите сначала номер задания (C1 и т.д.), а затем полное решение.

C1

Решите уравнение $2\log_{12}\left(x + \frac{6}{x-5}\right) = \log_{12}\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) + 3$.

Преобразуем

$$2\log_{12}\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} = \log_{12}\frac{3x - 9 - 2x + 4}{(x - 2)(x - 3)} + 3 \Rightarrow 2\log_{12}\frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 5} = \log_{12}\frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} + 3.$$

Найдем область существования логарифмов, т.е. решим систему методом интервалов:

$$\begin{cases} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 5} > 0, \\ \frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} > 0. \end{cases}$$

При $x = 1$ получим $\left(\frac{-}{-} = -\right)$ т.е. в первом интервале минус



Решением будет $(2; 3) \cup (5; +\infty)$.

Продолжим

$$2\log_{12}\frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 5} - \log_{12}\frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} = 3 \Rightarrow \log_{12}\frac{(x - 3)^2(x - 2)^2(x - 2)(x - 3)}{(x - 5)^2(x - 5)} = 3 \Rightarrow \left(\frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 5}\right)^3 = 12^3$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 5} = 12 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 - 12x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 17x + 66 = 0$$

По теореме Виета корни этого уравнения 6 и 11. Они входят в область определения.

Ответ: Корни этого логарифмического уравнения 6 и 11.

C2

При каких значениях параметра n уравнение $15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

$$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1} \Rightarrow 15 \cdot 10^x + n \cdot 10^{x+1} = n + 20 \Rightarrow 10^x (15 + 10n) = n + 20 \Rightarrow 10^x = \frac{n+20}{15+10n}.$$

Что бы это уравнение не имело решения, нужно что правая часть равенства была не положительной т.е.

$$\frac{n+20}{15+10n} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} n+20 \leq 0, \\ 15+10n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leq -20, \\ n > -1,5 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$\begin{cases} n+20 \geq 0, \\ 15+10n < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq -20, \\ n < -1,5 \end{cases} \Rightarrow -20 \leq n < -1,5.$$

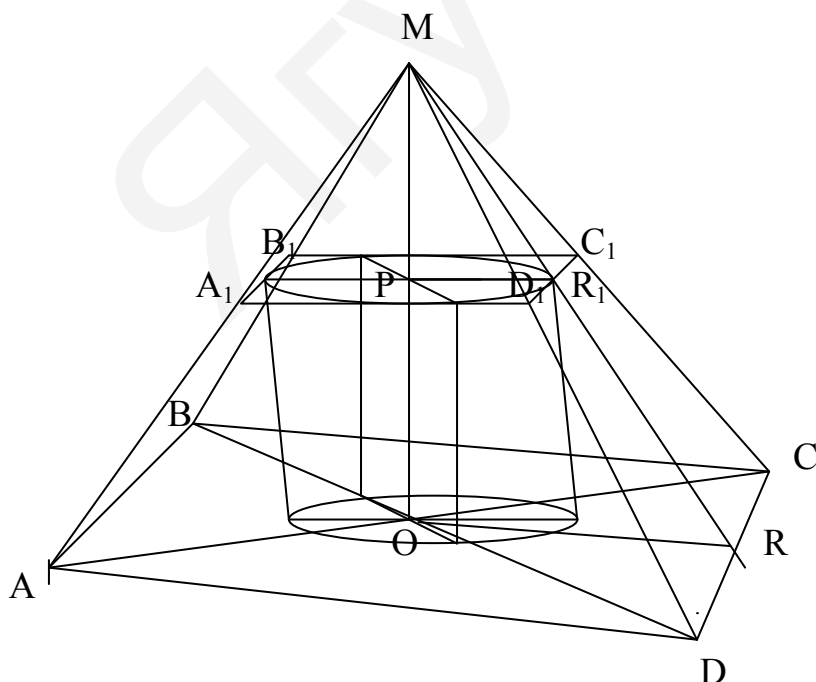
$n = -1,5$ – тоже входит в область

определения функции, поэтому общее решение, что уравнение не имеет решения будет $-20 \leq n \leq -1,5$

Ответ: $n \in [-20; -1,5]$.

C3

Основание пирамиды $MABCD$ – ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α , параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что $MP:PO=2:3$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α . Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.



Учитывая условие, что двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны делаем вывод, что высота пирамиды и ось конуса проходят через точки пересечения

диагоналей ромбов, которые будут центром вписанных в ромбы окружностей. У ромба $A_1B_1C_1D_1$ радиус вписанной окружности будет радиусом основания цилиндра. Обозначим радиус основания цилиндра через r , тогда $MO:MP = OR:r = 5:2 \Rightarrow$ подобия прямоугольных треугольников MOR и MPR_1 ;
 $MO = H$ – высота пирамиды; $MO - MP = h$ – высота конуса;

Отсюда $OR = 2,5 \cdot r$, Объём цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi r^2 \cdot h = 9\pi\sqrt{3} \Rightarrow hr^2 = 9\sqrt{3}$.
 Объём пирамиды найдём $V_{\text{п}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$; $S_{\text{осн.}} = ah_r$ (где a и h_r – основание и высота ромба) $h_r = 2 \cdot OR = 5r$, $PR_1 \perp D_1C$ – радиус проведённый в точку касания. Плоскости основания и сечения пирамиды параллельны, $CD \parallel C_1D_1$, $PR_1 \perp C_1D_1 \Rightarrow OR \perp CD$.

$$S_{\text{осн.}} = 5r \cdot a = a^2 \sin 60^\circ \Rightarrow 5ar = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{10r\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{\text{осн.}} = \frac{50r^2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{MO}{MP} = \frac{H}{H-h} = \frac{5}{2}.$$

$$2H = 5H - 5h \Rightarrow -3H = -5h \Rightarrow H = \frac{5}{3}h$$

Значит

$$V_{\text{п}} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 50r^2\sqrt{3}/3 \cdot \frac{5}{3}h = \frac{250\sqrt{3}}{27} \cdot r^2h = \frac{250\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3}}{27} = 250.$$

Объём пирамиды равен 250.

C4 Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

Решение:

В области определения есть двузначные, но нет трёхзначных чисел. Значит область определения промежуток $10 \leq x < 100$.

Найдём область определения функции y

$$a^x - a^{ax+2} > 0 \Rightarrow a^x (1 - a^{ax+2-x}) > 0 \Rightarrow a^{x(a-1)+2} < 1. \text{ Ведь по условию } a > 0.$$

$$1. \text{ Если } 0 < a < 1, \text{ то } x(a-1)+2 > 0 \Rightarrow a-1 > -\frac{2}{x} \Rightarrow a > 1 - \frac{2}{x}.$$

$$10 \leq x < 100 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{100} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{100} < \frac{2}{x} \leq \frac{2}{10} \Rightarrow -0,2 \leq -\frac{2}{x} < -0,02 \Rightarrow 1 - 0,2 \leq 1 - \frac{2}{x} < 1 - 0,02 \Rightarrow 0,8 \leq 1 - \frac{2}{x} < 0,98. (1)$$

$$2. \text{ Если } a > 1, x(a-1)+2 < 0 \Rightarrow x(a-1) < -2 \Rightarrow a-1 < -\frac{2}{x} \Rightarrow a < 1 - \frac{2}{x}. \text{ Противоречие условию } a > 1.$$

Оно выполняется, если $0,8 < a \leq 0,98$. Для достоверности можно проверить границы.

$$a = 0,8 \Rightarrow 0,8^x - 0,8^{0,8x+2} (\text{идёт } 10) = 0,8^{10} - 0,8^{10} = 0 \quad a = 0,8 \text{ не является решением}$$

$$a = 0,98 \Rightarrow 0,98^x - 0,98^{0,98x+2} (\text{идёт } 10) = 0,98^{10} - 0,98^{11,8} > 0 \quad a = 0,98 - \text{решение.}$$

Ответ: $a \in (0,8; 0,98]$.

