

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.
6 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета? (14 б.)

2. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами? (14 б.)

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. В какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько? (18 б.)

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную? (18 б.)

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом 60° . Найдите площадь общей части двух квадратов. (18 б.)

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили квадрат 10×10 . Каковы размеры отложенного прямоугольника? (18 б.)

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.
7 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета? (12 б.)

2. На сторонах квадрата записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на сторонах, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 323. Найдите сумму чисел на сторонах квадрата. (16 б.)

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. В какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько? (18 б.)

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную? (18 б.)

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом 60° . Найдите площадь общей части двух квадратов. (18 б.)

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили прямоугольник с периметром 234. Каковы размеры отложенного прямоугольника? (18 б.)

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.
8 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета? (10 б.)

2. Решите ребус $AX \times AX = BRRP$.
(Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры, а разные буквы заменяют разные цифры.) (15 б.)

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. В какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько? (15 б.)

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную? (15 б.)

5. На доске было записано три числа (не обязательно различных). Данил заметил, что если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. А Василий заметил, что если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Можно ли по этим данным достоверно определить, насколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3? (15 б.)

6. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом 60° . Найдите площадь общей части двух квадратов. (15 б.)

7. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO , BO и CO . (15 б.)

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.

9 класс

1. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами? (10 б.)

2. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета? (13 б.)

3. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба. (14 б.)

4. Решите ребус $AX \times AX = BRRR$.
(Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры. Разные буквы заменяют разные цифры.) (15 б.)

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + 1; \\ (x+2)(y+2)(z+2) = xyz + 2. \end{cases} \quad (16 \text{ б.})$$

6. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO , BO и CO . (16 б.)

7. Назовём натуральное число интересным, если оно удовлетворяет следующим трём условиям: а) оно девятизначное; б) в его записи есть каждая ненулевая цифра; в) оно делится на 11. Найдите:

- 1) какое-нибудь интересное число;
- 2) самое маленькое и самое большое интересное число;
- 3) общее количество интересных чисел. (16 б.)

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.
10 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета? (13 б.)

2. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба. (14 б.)

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x-y}; \\ 6y^2 + 7y + 1 = \sqrt{x-y-1}. \end{cases} \quad (14 \text{ б.})$$

4. Решите неравенство $\frac{(x^3 + x)^3 - 8x^6}{32x^{10} - (x+2)^5} \geq 0$. (14 б.)

5. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO , BO и CO . (15 б.)

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2} + \dots + \sqrt{n^2 + 2n}$. (15 б.)

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x * y = \frac{2x+y}{xy+2}$. Найдите значение выражения

$$(\dots((2014 * 2013) * 2012) * \dots * 2) * 1. \quad (15 \text{ б.})$$

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
9 марта 2014 г.
11 класс

1. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба. (14 б.)

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x-y}; \\ 6y^2 + 7y + 1 = \sqrt{x-y-1}. \end{cases} \quad (14 \text{ б.})$$

3. Решите неравенство $\frac{2\operatorname{arctg}(x^3+x) - 2\operatorname{arctg}(2x^2)}{\operatorname{arctg}(2x^2) - \operatorname{arctg}(2x+2)} \leq 0$. (14 б.)

4. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны. Медианы граней, проведённые из вершины D , равны 13, 14 и 15. Найдите:

- 1) площадь основания ABC ;
- 2) объём пирамиды $ABCD$;
- 3) радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$. (14 б.)

5. Докажите, что в десятичной записи числа 2^{697} какая-то цифра встретится не менее 22 раз. (14 б.)

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \dots + \sqrt{n^2+2n}$. (15 б.)

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x * y = \frac{3x+2y}{xy+6}$. Найдите значение выражения

$$(\dots((2014 * 2013) * 2012) * \dots * 2) * 1. \quad (15 \text{ б.})$$