Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

11 класс

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \log_2 x.$$

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y + x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

5. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ — ненулевые числа, причём

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{999} - x_{1000}| + |x_{1000} - x_1| = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{1000}|$.

6. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются друг друга. Докажите, что касаются друг друга и окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD.

7. Докажите, что на рёбрах любого описанного многогранника можно расставить такие числа, что площадь любой грани этого многогранника численно равна сумме чисел, расставленных на рёбрах, ограничивающих эту грань.

Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

10 класс

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}.$$

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y + x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

5. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ — ненулевые числа, причём

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{999} - x_{1000}| + |x_{1000} - x_1| = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{1000}|$.

6. Докажите, что в треугольнике ABC угол ABC вдвое больше угла CAB тогда и только тогда, когда

$$BC^2 + BC \cdot AB = AC^2.$$

7. Точка M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$. На отрезке MD выбрана точка O. Лучи AO, BO, CO пересекают боковые грани пирамиды в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию пирамиды.

Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

8-9 классы

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

2. При каких значениях параметра a система уравнений

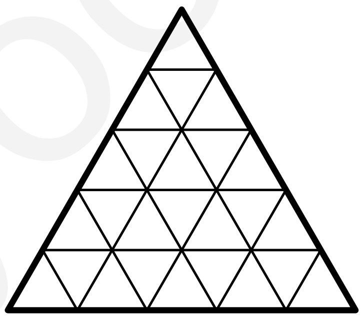
$$\begin{cases} |y+x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \sqrt{x - 1}.$$

4. Равносторонний треугольник со стороной 5 разделили на 25 равных треугольников отрезками, параллельными его сторонам.



Какое наибольшее число ромбов со стороной 1 можно вырезать по линиям получившейся сетки?

5. $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, в котором все стороны равны и $\angle A = \angle C = 108°$. Докажите, что $ABCDE$ — правильный пятиугольник.

6. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

7. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезке BM выбрана точка O. Лучи AO и CO пересекают стороны BC и AB в точках A_1 и C_1. Докажите, что прямая A_1C_1 параллельна прямой AC.

Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

6-7 классы

24 марта 2013 г.

1. Каждый из учеников класса увлекается футболом или танцами (есть те, кто увлекается и футболом, и танцами). Оказалось, что как у поклонников футбола, так и у поклонников танцев средний балл по физкультуре больше 4. Может ли средний балл по физкультуре у учеников всего класса быть меньше 4?

2. Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них всегда лжёт, а второй может быть и правдивым, и лживым (по настроению). Знайка спросил одного из них: «Ты — Винтик?» Услышав ответ «да», Знайка задал тот же вопрос другому брату. По его ответу Знайка смог определить, кто есть кто. Кто же оказался Винтиком — первый или второй брат?

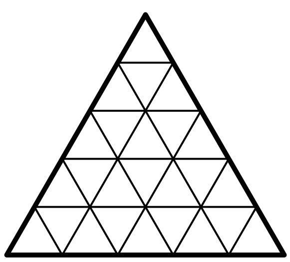
3. У крестьянина были коза, корова и кобыла, и ещё стог сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. Может ли отец, если он силён в математике, согласиться с подсчётами сына?

4. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

5. Сколько существует натуральных чисел n, для которых из неравенств $n > 10$, $n > 20$, $n > 30$, $n < 40$, $n < 50$, $n < 60$ не выполняется только одно?

6. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

7. Равносторонний треугольник со стороной 5 разделили на 25 равных треугольников отрезками, параллельными его сторонам.



Какое наибольшее число ромбов со стороной 1 можно вырезать по линиям получившейся сетки?