

Вариант 1

1. **(2 балла)** В луже живут амёбы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амёбы разных видов могут слиться в одну амёбу третьего вида. Известно, что утром в луже было 26 красных, 31 синяя и 16 желтых амёб, а вечером осталась одна амёба. Какого она цвета?

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}.$$

Ответ: $x = \frac{7}{15}; x = \frac{4}{5}$

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x)) = x$, если известно, что $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Ответ: $\frac{1}{2}(5 \pm 3\sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{41})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(y-x) = \log_8(9y-15x) \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ (-\sqrt{15}; 0); \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; 3\sqrt{\frac{3}{2}} \right); (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos \frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}$, 2 и 1.

6. (5 баллов) Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^2 при $n=1,2,3,\dots$ ($a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$, $a_4=1$, $a_5=2,\dots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n , удовлетворяющих неравенству

$$10^k \sqrt{b} \leq n < 10^k \sqrt{b+1},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b , поскольку

$$10^{2k} b = \underbrace{b0\dots0}_{2k} \leq n^2 \leq \underbrace{b9\dots9}_{2k} = 10^{2k} (b+1) - 1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $[10^k \sqrt{b}; 10^k \sqrt{b+1})$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt{b+1} - \sqrt{b} > 0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, ..., девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 2

1. **(2 балла)** В луже живут амёбы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амёбы разных видов могут слиться в одну амёбу третьего вида. Известно, что утром в луже было 47 красных, 40 синих и 53 желтых амёб, а вечером осталась одна амёба. Какого она цвета?

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{9x-4}{6} \right] = \frac{12x+7}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{9}{4}$; $x = -\frac{23}{12}$.

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x)) = x$, если известно, что $f(x) = x^2 + 2x - 4$.

Ответ: $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(y-x) = \log_8(19y-13x) \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ (-\sqrt{13}; 0); (-3; -2); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

5. (5 баллов) Стороны параллелограмма равны 5 и 13, а угол между ними – $\arccos \frac{6}{13}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: 3 и 2, $\frac{39}{5}$ и $\frac{26}{5}$.

6. (5 баллов) Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении $\left[\sqrt{n} \right]$ при $n=1,2,3,\dots$ ($a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=2, a_5=2,\dots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n , удовлетворяющих неравенству

$$10^{2k} \cdot b^2 \leq n < 10^{2k} (b+1)^2,$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b , поскольку

$$10^k b = \overline{b \underbrace{0 \dots 0}_k} \leq \sqrt{n} \leq \overline{b \underbrace{9 \dots 9}_k} = 10^k (b+1) - 1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^{2k} b^2; 10^{2k} (b+1)^2 \right)$ неограниченно возрастает (т.к. $(b+1)^2 - b^2 > 0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, ..., девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 3

1. **(2 балла)** В луже живут амёбы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амёбы разных видов могут слиться в одну амёбу третьего вида. Известно, что утром в луже было 62 красных, 48 синих и 63 желтых амёб, а вечером осталась одна амёба. Какого она цвета?

Ответ: желтая.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{8x-4}{7} \right] = \frac{12x+3}{5}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{13}{12}$

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x)) = x$, если известно, что $f(x) = x^2 + 5x - 4$.

Ответ: $2(-1 \pm \sqrt{2})$, $-3 \pm \sqrt{7}$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(y-x) = \log_8(11y-5x) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ (-\sqrt{5}; 0); (-1; 2); \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 5, а угол между ними – $\arccos \frac{7}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот

параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{4}{5}$ и $\frac{6}{5}$, 2 и 3.

6. (5 баллов) Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^3 при $n=1,2,3,\dots$ ($a_1=1$, $a_2=8$, $a_3=2$, $a_4=6$, $a_5=1,\dots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n , удовлетворяющих неравенству

$$10^k \sqrt[3]{b} \leq n < 10^k \sqrt[3]{b+1},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b , поскольку

$$10^{3k} b = \overbrace{b0\dots0}^{3k} \leq n^3 \leq \overbrace{b9\dots9}^{3k} = 10^{3k}(b+1) - 1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $[10^k \sqrt[3]{b}; 10^k \sqrt[3]{b+1})$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt[3]{b+1} - \sqrt[3]{b} > 0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, ..., девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 4

1. **(2 балла)** В луже живут амёбы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амёбы разных видов могут слиться в одну амёбу третьего вида. Известно, что утром в луже было 45 красных, 73 синих и 66 желтых амёб, а вечером осталась одна амёба. Какого она цвета?

Ответ: желтая.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{7x-3}{5} \right] = \frac{17x-9}{6}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{17}, x = \frac{9}{17}$

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x)) = x$, если известно, что $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

Ответ: $3 \pm \sqrt{6}, 2 \pm \sqrt{5}$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(y-x) = \log_8(18y-26x) \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(-\sqrt{26}; 0); (1; 5); (2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos \frac{6}{13}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот

параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{13}{9}$ и $\frac{5}{9}$, $\frac{13}{6}$ и $\frac{5}{6}$.

6. (5 баллов) Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении $\left[\sqrt{4n} \right]$ при $n=1,2,3,\dots$ ($a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=4,\dots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{10^{2k} \cdot b^2}{4} \leq n < \frac{10^{2k} (b+1)^2}{4},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b , поскольку

$$10^k b = \overline{b \underbrace{0 \dots 0}_k} \leq \sqrt{4n} \leq \overline{b \underbrace{9 \dots 9}_k} = 10^k (b+1) - 1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[\frac{10^{2k} b^2}{4}; \frac{10^{2k} (b+1)^2}{4} \right)$

неограниченно возрастает (т.к. $(b+1)^2 - b^2 > 0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, ..., девяток. Поэтому она не может быть периодической.