

Московская устная математическая олимпиада

7 класс, 2002 год

1. В наборе из 10 гирек любые четыре гири перевешивают любые три из оставшихся. Верно ли, что любые три гири из этого набора перевешивают любые две из оставшихся семи?

2. Существуют ли такие цифры Г и У, что число УГУ делится на 13, а число ГУГ — не делится?

3. Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)

4. Вовочка пришёл сдавать компьютерный тест. На экране появились 6 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». После ответа на все вопросы компьютер вычисляет количество правильных ответов и ставит: двойку, если правильных ответов не более двух; тройку — если их три; четвёрку — если четыре; пятёрку — если пять или шесть.

Вовочка не знал ответа ни на один из вопросов. Тем не менее, по предыдущему опыту он знал следующее: первый и последний вопросы требуют противоположных ответов; не бывает, что на три подряд вопроса ответ один и тот же; не бывает, что утвердительные и отрицательные ответы строго чередуются; последовательность ответов на первые три вопроса не бывает в точности такой же, как последовательность ответов на последние три вопроса.

Помогите Вовочке не получить двойку.

5. Какое наибольшее количество ладей может стоять на шахматной доске, если половина из них белые, половина — чёрные, и при этом никакая белая ладья не бьёт никакую чёрную?

6. Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, а некоторые — нет. (Например, число 1001 представимо, поскольку $1001 = 993 + 99 + 9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$?

7. Робинзон Крузо поручил Пятнице провести перепись собак, кошек, коз и попугаев. Пятница решил отмечать каждую собаку палочкой, кошку — палочкой и ноликом, козу — двумя ноликами. Сможет ли Пятница отметить каждого попугая какой-нибудь последовательностью из палочек и ноликов, чтобы по его отчёту (Пятница пишет слева направо подряд без пробелов) Робинзон мог однозначно установить, сколько каких животных приняли участие в переписи?