СУНЦ УрФУ
Вступительный тест по математике для поступающих в 9 физико-математический, математико-информационный, физико-химический и естественнонаучный классы
17 мая 2015

Вариант 1

Часть B

К заданиям части B приведите ***только ответ****, записав его в отведенном месте. Переписывать решение задачи в чистовик не нужно.*

B1. Упростите выражение: $a^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2a-1}{a^4}}$, если $0<a<1$.

Решение. Упростим выражение:

$$a^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2a-1}{a^4}}=a^2\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^4}}=\frac{a^2\cdot|a-1|}{a^2}=|a-1|=1-a.$$

При $0<a<1$ подмодульное выражение отрицательно, поэтому модуль раскроется со знаком минус.

Ответ: $1-a$.

B2. Решите уравнение: $|x^2+3x+3|=|x^2-6x+8|$.

Решение. Возможны два случая:

(1) $x^2+3x+3=x^2-6x+8$ $\quad 9x=5$ $\quad x=\frac{5}{9}$;

(2) $x^2+3x+3=-(x^2-6x+8)$ $\quad 2x^2-3x+11=0$ $\quad D<0$, корней нет.

Ответ: $x=\frac{5}{9}$.

B3. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle A=45^\circ$, $BC=4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Так как треугольник ABC остроугольный, центр O описанной около него окружности лежит внутри треугольника. Рассмотрим описанную около треугольника окружность. Угол $\angle BAC$ вписанный и опирается на дугу BC, а угол $\angle BOC$ центральный и опирается на ту же дугу. Значит, $\angle BOC=2\angle BAC=90^\circ$ (рис. 1). Тогда треугольник BOC равнобедренный и прямоугольный. По теореме Пифагора получаем $2BO^2=BC^2=32$, откуда $BO=4$.

Ответ: 4.

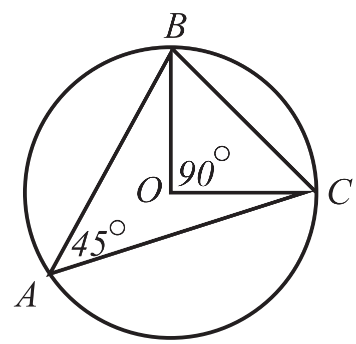

Рис. 1

B4. Решите неравенство: $(x-2)(x^2-2x-3)>(x-2)^2(x-1)$.

Решение. Перенесем правую часть неравенства и упростим выражение:

$$(x-2)\big(x^2-2x-3-(x-2)(x-1)\big)=(x-2)(x-5)>0.$$

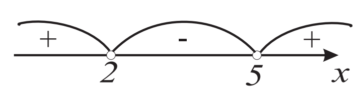

Рис. 2

Отметив на числовой прямой точки $x=2$ и $x=5$ и определив знак выражения $(x-2)(x-5)$ на каждом из трех промежутков (рис. 2), получим

Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

B5. На день рождения Карлсону подарили мешок с конфетами: шоколадными и карамельками. Всего конфет в мешке было меньше 100, причем соотношение шоколадных и карамелек было 9 : 7.

Карлсон сразу же съел 20% всех конфет, причем 25% из них составляли карамельки. Сколько карамелек осталось в мешке?

Решение. Поскольку в мешке соотношение шоколадных конфет и карамелек $9:7$, общее количество конфет должно делиться на 16. При этом Карлсон сразу же съел $20\% = \frac{1}{5}$ всех конфет, следовательно, общее число конфет должно делиться на 5. Единственное подходящее число, меньшее 100, делящееся на 16 и 5, — это 80.

Если в мешке было всего 80 конфет, то среди них $\frac{9}{16}\cdot 80 = 45$ шоколадных и $\frac{7}{16}\cdot 80 = 35$ карамелек. Карлсон сразу съел $\frac{1}{5}\cdot 80 = 16$ конфет, из них $\frac{1}{4}\cdot 16 = 4$ карамельки. Значит в мешке осталась $35-4=31$ карамелька.

Ответ: 31.

B6. Площадь треугольника ABC равна 12. Точка M — середина AC (рис. 3), точки K и L делят сторону BC на три равные части. Найдите площадь заштрихованной части.

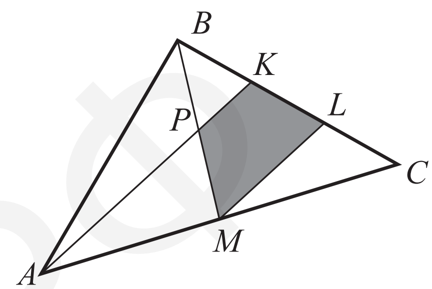

Рис. 3

Решение. Пусть P — точка пересечения отрезков BM и AK. Так как BM — медиана в $\triangle ABC$, то $S_{CBM} = \frac{S_{ABC}}{2} = 6$. По условию $BL : LC = 2:1$. Кроме того, в треугольниках BLM и MLC общая высота. Тогда $S_{BLM} = \frac{2S_{CBM}}{3} = 4$. Треугольники BPK и BLM подобны, и коэффициент подобия равен $\frac{BK}{BL} = \frac{1}{2}$. Значит, $S_{BPK} = \frac{S_{BLM}}{4} = 1$. Откуда $S_{PKLM} = 3$.

Ответ: 3.

B7. Какова последняя цифра числа $13^{2015}+13$?

Решение. Отметим, что последняя цифра числа 13^n совпадает с последней цифрой числа 3^n, и найдем последнюю цифру числа $3^{2015}+3$.

$3^0 = \mathbf{1}$ $\quad 3^4 = 8\mathbf{1}$ $\quad 3^{4n}$ оканчивается на $\mathbf{1}$;
$3^1 = \mathbf{3}$ $\quad 3^5 = 24\mathbf{3}$ $\quad 3^{4n+1}$ оканчивается на $\mathbf{3}$;
$3^2 = \mathbf{9}$ $\quad 3^6 = 72\mathbf{9}$ $\quad 3^{4n+2}$ оканчивается на $\mathbf{9}$;
$3^3 = 2\mathbf{7}$ $\quad 3^7 = 218\mathbf{7}$ $\quad 3^{4n+3}$ оканчивается на $\mathbf{7}$.

Поскольку $2015 = 4\cdot 503+3$, последняя цифра числа 3^{2015} равна 7. Значит, $3^{2015}+3$ оканчивается на 0.

Ответ: 0.

B8. Упростите выражение: $\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}$.

Решение. Выделим полный квадрат под корнем: $6-4\sqrt{2} =$ $= 4 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} + 2 = \left(2-\sqrt{2}\right)^2$. Тогда:

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}} = \frac{4}{\sqrt{2}+|2-\sqrt{2}|} = \frac{4}{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

B9. Какова сумма углов, отмеченных на рисунке?

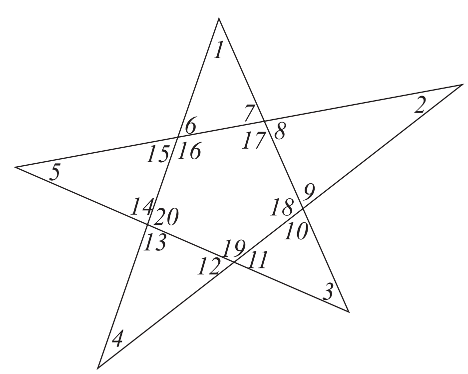

Рис. 4

Решение. Вертикальные углы, отмеченные на рисунке числами 6 и 15, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12, 13 и 14 соответственно, образуют пары равных углов, поэтому искомая сумма углов равна

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5 = 5\cdot 180^\circ - 2\angle 6 - 2\angle 7 - 2\angle 9 - 2\angle 11 - 2\angle 13 = 900^\circ - 2(\angle 6+\angle 7+\angle 9+\angle 11+\angle 13).$$

Углы, отмеченные числами 6, 7, 9, 11, 13, смежные с углами пятиугольника, отмеченными числами 16, 17, 18, 19 и 20, сумма которых составляет $180^\circ\cdot 3 = 480^\circ$. Значит, искомая сумма равна

$$900^\circ - 2(5\cdot 180^\circ - 540^\circ) = 180^\circ.$$

Ответ: $180°$.

B10. Постройте график функции $y = \frac{|x+1|}{x+1}x$ (ответ изобразите на координатной системе ниже).

Решение. Данная функция определена при всех $x \neq -1$. Если $x > -1$, то строим часть прямой $y = x$. Если $x < -1$, то строим часть прямой $y = -x$. График функции изображен на рис. 5.

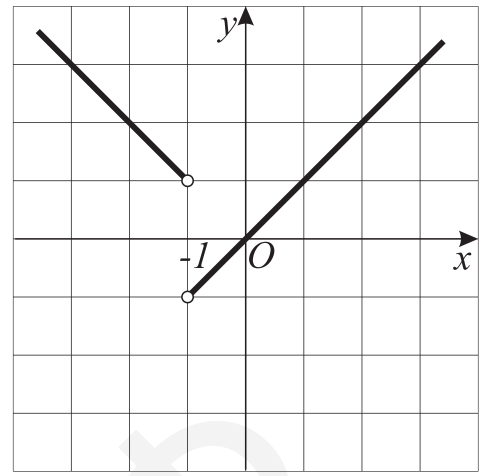

Рис. 5

Часть C

К заданиям части C нужно привести в чистовике ***полное решение*** *и ответ.*

C1. Решите уравнение: $\dfrac{x^2}{x+2} + 1 = \dfrac{4}{x+2}$.

Решение. Перенесем правую часть уравнения налево и упростим выражение:

$$\frac{x^2}{x+2} + 1 - \frac{4}{x+2} = \frac{x^2 + (x+2) - 4}{x+2} = \frac{x^2 + x - 2}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = 0.$$

Поскольку $(x+2)$ не может равняться 0, единственный корень уравнения $x = 1$.

Ответ: 1.

C2. На майскую прогулку вышла колонна туристов длиной 1200 м во главе с Мироном, они движутся с постоянной скоростью 6 км/ч. Из конца колонны в ее начало с указаниями бежит старший инструктор Александр со скоростью 9 км/ч. Передав указания Мирону, Александр с той же скоростью возвращается назад в конец колонны. Какое расстояние пробежит Александр?

Решение. Разобьем задачу на две части: (1) Александр догоняет Мирона, (2) он возвращается назад в конец колонны.

(1) Поскольку сперва Александр бежит по ходу движения колонны, скорость, с которой он догоняет Мирона, равна $9 - 6 = 3$ км/ч. Таким образом на то, чтобы догнать Мирона, Александр потратит $\frac{1{,}2}{3} = 0,4$ часа.

(2) При движении обратно Александр нагоняет конец колонны со скоростью $9 + 6 = 15$ км/ч. Следовательно на то, чтобы вернуться обратно, у него уйдет $\frac{1{,}2}{15} = 0,08$ часа.

Поскольку скорость Александра постоянна, пробежит он всего $9 \cdot (0,4 + 0,08) = 9 \cdot 0,48 = 4,32$ км.

Ответ: 4,32 км.

C3. а) Докажите, что прямая, проходящая через середину меньшего основания трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, проходит через середину большего основания.

б) Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если прямые, содержащие ее боковые стороны, перпендикулярны, а длины оснований равны 2 и 5.

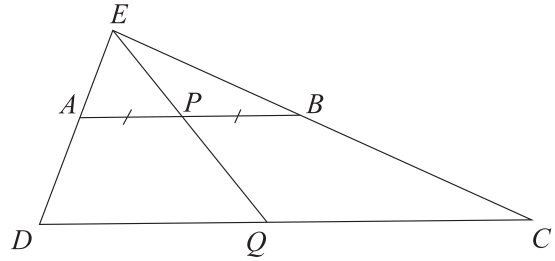

Рис. 6

Решение. а) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Обозначим через E точку пересечения прямых, содержащих ее боковые стороны, а через P середину основания AB. Пусть Q — точка пересечения прямых EP и CD. В треугольниках AEP и DEQ: $\angle AEP$ — общий, $\angle EAP = \angle EDQ$ как соответственные для параллельных прямых AP и DQ и секущей ED. Значит, $\triangle AEP \backsim \triangle EDQ$. Получаем, что $\frac{AP}{DQ} = \frac{EP}{EQ}$. Аналогично из подобия треугольников

EPB и ECQ следует равенство $\frac{EP}{EQ} = \frac{PB}{CQ}$. Тогда $\frac{AP}{DQ} = \frac{PB}{QC}$. Точка P — середина AB, стало быть, $AP = PB$, но тогда $DQ = QC$, что и требовалось доказать.

б) По условию $\angle AEB = 90°$. В силу доказанного выше утверждения, EP и EQ — медианы в прямоугольных треугольниках AEB и DEC, поэтому $EP = \frac{AB}{2} = 1$, $EQ = \frac{CD}{2} = 2{,}5$. Тогда $PQ = EQ - EP = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

C4. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + (3+a)x + 5a - 1 = 0$ и установите, при каких значениях a она будет наименьшей.

Решение. Посчитаем дискриминант и найдем значения параметра a, при которых уравнение имеет решение:

$D = (3+a)^2 - 4(5a-1) = a^2 - 14a + 13 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-13)(a-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 13$ или $a \leqslant 1$.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + (3+a)x + 5a - 1 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(3+a), \\ x_1 \cdot x_2 = 5a - 1. \end{cases}$$

Выразим сумму квадратов корней и воспользуемся найденными соотношениями:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (3+a)^2 - 2(5a-1) = a^2 - 4a + 11 = (a^2 - 4a + 4) + 7 = (a-2)^2 + 7.$$

Заметим, что при любом значении a выражение $(a-2)^2 \geqslant 0$, следовательно $x_1^2 + x_2^2 = (a-2)^2 + 7 \geqslant 7$. Равенство достигается при $a = 2$, однако в таком случае $D < 0$ и уравнение решений не имеет.

При допустимых $a \in (-\infty; 1] \cup [13; +\infty)$ наименьшее значение выражения $(a-2)^2 + 7$ равно 8 и достигается при $a = 1$.

Ответ: $x_1^2 + x_2^2 = (a-2)^2 + 7$, наименьшее значение достигается при $a = 1$.

СУНЦ УрФУ
Вступительный тест по математике для поступающих в 9 физико-математический, математико-информационный, физико-химический и естественнонаучный классы
17 мая 2015

Вариант 2

Часть B

К заданиям части B приведите ***только ответ****, записав его в отведенном месте. Переписывать решение задачи в чистовик не нужно.*

B1. Упростите выражение: $\frac{x^2}{x+2}\sqrt{1+\frac{4(1+x)}{x^2}}$, если $-2 < x < 0$.

*Ответ:*____________________

B2. Решите уравнение: $|x^2 - 8x + 7| = |x^2 + x + 1|$.

Ответ: ____________________

B3. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle A = 60°$, $BC = 4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ____________________

B4. Решите неравенство: $(x+3)(x^2-5x+4) < (x+3)^2(x+6)$.

Ответ: ____________________

B5. На день рождения Карлсону подарили мешок с конфетами: шоколадными и карамельками. Всего конфет в мешке было меньше 100, причем соотношение шоколадных и карамелек было 9 : 7. Карлсон сразу же съел 25% всех конфет, причем 20% из них составляли карамельки. Сколько шоколадных конфет осталось в мешке?

Ответ: ____________________

B6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6. На сторонах AB и CD отмечены точки E и F (рис. 1), так что $AE : EB = CF : FD = 1 : 2$. Найдите площадь заштрихованной части.

Ответ: ____________________

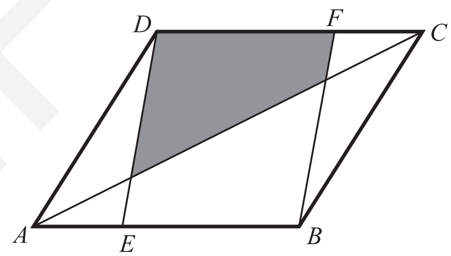

Рис. 1

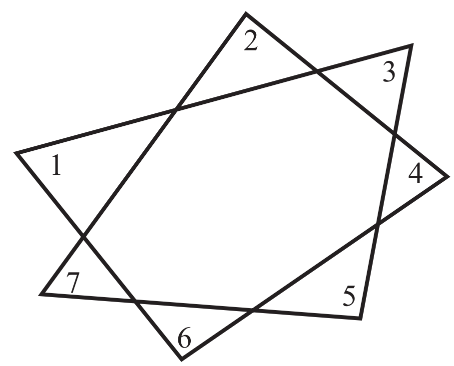

Рис. 2

B7. Какова последняя цифра числа $17^{2015} + 17$?

Ответ: ____________________

B8. Упростите выражение: $\frac{3}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}}$.

Ответ: ____________________

B9. Какова сумма углов, отмеченных на рис. 2?

Ответ: ____________________

B10. Постройте график функции $y = \frac{x-1}{|x-1|}x$ (ответ изобразите на координатной системе ниже).

Ответы на задания части B

B1. $-x$; **B2.** $\frac{2}{3}$; **B3.** 4 ; **B4.** $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; **B5.** 29 ; **B6.** 2 ; **B7.** 0 ; **B8.** 3 ; **B9.** 540°; **B10.** См. рис. 3.

Часть C

К заданиям части C нужно привести в чистовике ***полное решение*** *и ответ.*

C1. Решите уравнение: $\dfrac{x^2 - 2x}{3 - x} + 1 = \dfrac{3}{3 - x}$.

C2. На военном параде движется колонна солдат длиной 500 м со скоростью 5 км/ч. Из конца колонны в ее начало с донесением отправляется связной со скоростью 7 км/ч. Передав донесение командиру, он с той же скоростью возвращается назад в конец колонны. Какое расстояние пробежит связной?

C3. а) Докажите, что прямая, проходящая через середину меньшего основания трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середину большего основания.

б) Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если ее диагонали перпендикулярны, а длины оснований равны 2 и 5.

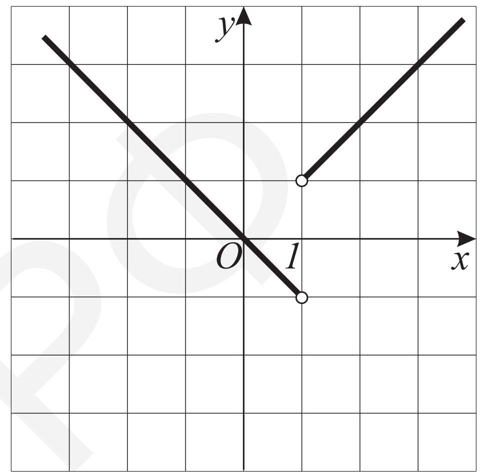

Рис. 3

C4. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + (2 + a)x - 2 + 3a = 0$ и установите, при каких значениях a она будет наименьшей.

Ответы на задания части C

C1. 0 ; **C2.** $\frac{49}{24}$ км ; **C3.** 3,5 ; **C4.** $(a - 1)^2 + 7$, наименьшее значение при $a = 1$.