

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

В	С	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
3 мая 2016 года
Вариант 1

Часть В

К каждому заданию приведите только ответ.

В1. Вычислить $(\sqrt{10} - \sqrt{5})\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}}$.

Ответ: _____

В2. Сократить дробь $\frac{1 + 4b - 4a}{4a^2 - 4b^2 - a - b}$.

Ответ: _____

В3. Овощи подешевели на 15%. Сколько овощей можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 3,4 кг?

Ответ: _____

В4. В какой точке прямая, проходящая через точки $A(-13; 75)$ и $B(15; -65)$ пересекает ось OX ?

Ответ: _____

В5. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 6$. Найти радиус описанной окружности.

Ответ: _____

В6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5}, \\ x - y = 4. \end{cases}$

Ответ: _____

В7. Решить уравнение: $|1 - |x^2 - 6|| = 2$.

Ответ: _____

В8. Решить неравенство $\frac{2 + x^2}{x - 1} \leq \frac{1}{3}$.

Ответ: _____

В9. Биссектриса равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найти его площадь.

Ответ: _____

Часть С

К заданиям приведите полное решение.

С1. Упростить выражение $\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - 3}{3\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$.

С2. Решить уравнение $2x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 45x = 0$.

С3. При каких значениях a расстояние между корнями уравнения $x^2 - 2ax + \frac{3}{4}a^2 = 0$ равно 1?

С4. Точка O лежит на средней линии трапеции $ABCD$, где M — середина боковой стороны AB , N — середина боковой стороны CD . Прямые BO и CO пересекают основание AD в точках K и L соответственно. Найти отношение $MO : ON$, если $AL : LK : KD = 2 : 3 : 1$.

Персональные данные абитуриента вносятся **только** в шифровальный лист!

В	С	Сумма	Балл (из 10)	Подпись

ШИФР. Заполняет сотрудник ОКО

Вступительный тест по математике
для поступающих в физико-химический и химико-биологический классы
СУНЦ УрФУ
3 мая 2016 года
Вариант 2

Часть В

К каждому заданию приведите только ответ.

В1. Вычислить $(\sqrt{8} + \sqrt{10})\sqrt{32(2 - \sqrt{5})^2}$.

Ответ: _____

В2. Сократить дробь $\frac{5y - 5x - 1}{x + y + 5x^2 - 5y^2}$.

Ответ: _____

В3. Бананы подорожали на 30%. Сколько бананов можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 2,6 кг?

Ответ: _____

В4. В какой точке прямая, проходящая через точки $A(24; -3)$ и $B(-28; 10)$ пересекает ось OX ?

Ответ: _____

В5. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 6$. Найти радиус описанной окружности.

Ответ: _____

В6. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

Ответ: _____

В7. Решить уравнение: $||x^2 - 5| - 1| = 3$.

Ответ: _____

В8. Решить неравенство $\frac{4 + x^2}{x + 1} \geq \frac{1}{2}$.

Ответ: _____

В9. Площадь равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найти его медиану.

Ответ: _____

Часть С

К заданиям приведите полное решение.

С1. Упростить выражение $\frac{\sqrt{2-a} - \frac{5}{\sqrt{2+a}}}{\frac{5}{\sqrt{4-a^2}} - 1}$.

С2. Решить уравнение $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x = 0$.

С3. При каких значениях a расстояние между корнями уравнения $x^2 - 3ax + \frac{5}{4}a^2 = 0$ равно 2?

С4. Одна из двух параллельных прямых пересекает стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ в точках K и L , а другая — стороны CD и AD в точках M и N соответственно. Найти отношение $DM : MC$, если $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 2 : 3$ и $AN : ND = 4 : 1$.

Ответы и решение к части В

$$\text{В1. } (\sqrt{10} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{2})^2}} = \sqrt{5}(\sqrt{2} - 1) \frac{2\sqrt{5}}{|1-\sqrt{2}|} = \frac{2 \cdot 5 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = 10.$$

$$\text{В2. } \frac{1+4b-4a}{4a^2-4b^2-a-b} = \frac{1+4b-4a}{4(a-b)(a+b)-(a+b)} = \frac{1+4b-4a}{(a+b)(4(a-b)-1)} = \frac{-(-1-4b+4a)}{(a+b)(4a-4b-1)} = -\frac{1}{a+b}.$$

В3. Пусть x первоначальная цена 1 килограмма овощей, тогда на покупку овощей потрачено $3,4x$ рублей. После изменения цены стоимость одного килограмма овощей стала $0,85x$ рублей. Разделив общую сумму $3,4x$ на новую цену $0,85x$, получим, что теперь можно будет купить 4кг овощей.

Ответ: 4 кг.

В4. Точки $A(-13; 75)$ и $B(15; -65)$ лежат на прямой $y = kx + b$. Подставим координаты точек A и B в общее уравнение прямой и найдем k и b .

$$\begin{cases} 75 = k \cdot (-13) + b, \\ -65 = k \cdot 15 + b. \end{cases}$$

После вычитания из первого второго уравнений, получим $140 = -28k$ или $k = -5$. Подстановкой находим $b = 10$. Уравнение искомой прямой имеет вид $y = -5x + 10$. Точку пересечения с осью абсцисс находим при $y = 0$, т.е. $x = 2$.

Ответ: (2; 0).

В5. Треугольник ABC — прямоугольный, поэтому $\sin \angle B = \frac{AC}{AB}$, откуда $AB = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, т.е. $2\sqrt{3}$.

В6. Преобразуем систему к виду $\begin{cases} x = 4 + y, \\ \frac{1}{4+y} - \frac{1}{y} + \frac{4}{5} = 0. \end{cases}$ Домножив второе уравнение системы на $5y(4+y)$, получим $5y - 5(4+y) + 4y(4+y) = 0$ или $y^2 + 4y - 5 = 0$, откуда $y_1 = -5$, $y_2 = 1$. Подстановкой находим $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.

Ответ: $(-1, -5); (5, 1)$.

$$\text{В7. } |1 - |x^2 - 6|| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - |x^2 - 6| = 2, \\ 1 - |x^2 - 6| = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 6| = -1, \\ |x^2 - 6| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 = 3, \\ x^2 - 6 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9, \\ x^2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm 3$.

В8. Приводя к общему знаменателю, получим $\frac{3x^2-x+7}{(x-1) \cdot 3} \leq 0$.

При решении уравнения $3x^2 - x + 7 = 0$ обнаруживаем, что $D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 7 < 0$, поэтому $3x^2 - x + 7 > 0$ для любого x , значит исходное неравенство выполняется при $x - 1 < 0$.

Ответ: $x < 1$.

В9. Пусть ABC — равносторонний треугольник, его биссектриса AM (одновременно медиана и высота) равна $2\sqrt{3}$. Из треугольника ABM находим $AB = \frac{AM}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 4$. Отсюда

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Ответы и решение к части С

С1. На ОДЗ возможна следующая цепочка преобразований

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - 3 \right) : \left(3 \cdot \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) &= \left(\frac{1-3 \cdot \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) : \frac{3 \cdot \sqrt{(x-1)(x+1)} - 1}{\sqrt{x+1}} = \\ &= \frac{1-3 \cdot \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{3 \cdot \sqrt{x^2-1} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

С2. Используя вынесение за скобки и группировку, получим

$$x(2x^3 - 18x - 5x^2 + 45) = 0 \Leftrightarrow x(2x(x^2 - 9) - 5(x^2 - 9)) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9)(2x - 5) = 0,$$

откуда $x = 0$, $x = \pm 3$, $x = \frac{5}{2}$.

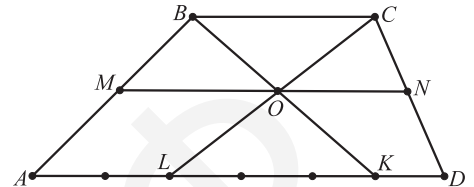
Ответ: $x = 0$, $x = \pm 3$, $x = \frac{5}{2}$.

С3. Для уравнения $x^2 - 2ax + \frac{3}{4}a^2 = 0$ находим $\frac{D}{4} = a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{a^2}{4}$. Отсюда $x_{1,2} = a \pm \frac{a}{2}$ или $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{3a}{2}$. По условию задачи $|x_1 - x_2| = 1$, т.е. $|\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}| = 1$, откуда $|a| = 1$ или $a = \pm 1$.

Ответ: при $a = \pm 1$ расстояние между корнями уравнения равно 1.

С4. Средняя линия MN параллельна основаниям, поэтому по теореме Фалеса прямая MN делит отрезки BK и CL пополам. Значит $[MO]$ — средняя линия треугольника ABK и $[ON]$ — средняя линия треугольника CLD . Пусть $AD = 6x$, тогда $AK = 5x$, следовательно $MO = \frac{5x}{2}$. Аналогично $DL = 4x$ и $ON = 2x$. То есть искомое отношение равно $MO : ON = \frac{5x}{2} : 2x = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{MO}{ON} = \frac{5}{4}$.



Вариант 2

Ответы к части В

В1. 8. **В2.** $-\frac{1}{x+y}$. **В3.** 2кг. **В4.** (12, 0). **В5.** $2\sqrt{3}$. **В6.** (4; 8); (8; 4). **В7.** $x = \pm 1$, $x = \pm 3$. **В8.** $x > -1$. **В9.** $2\sqrt{3}$.

Ответы к части С

С1. $-\sqrt{2-a}$. **С2.** $x = 0$, $x = \pm 2$, $x = -\frac{3}{2}$. **С3.** $a = \pm 1$. **С4.** $DM : MC = 1 : 2$.