

Варианты вступительных экзаменов по математике в 10 класс

М-10-1

1. Упростить выражение: $\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right) : \sqrt{ab}.$

2. Решить уравнение: а) $3\sqrt{x^2+1}+2x=7+x+\left(\sqrt{-x^2-5x-4}\right)^2;$

б) $\frac{3}{12x^2-14x+4}+\frac{1.5}{12x^2-17x+6}=8x^2-6x+1.$

3. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{(3(x^2+1)+10x)((x+3)^2-12x)}{3(x^2-1)-8x} > -5; \\ x^2-2x-3|x-1|-3 \leq 0. \end{cases}$$

4. Сумма третьего, шестого и девятого членов геометрической прогрессии (b_n) равна 5, а сумма девятого, двенадцатого и пятнадцатого членов этой прогрессии равна 40. Найти S_4 .

5. Числа a , b и c таковы, что $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+c=1$ и $2\sqrt{ab+2a+b+2}=c^2+2c+5$. Найти эти числа.

6. Найти все значения параметра a , при которых произведение корней уравнения $x^2+2x\sqrt{a^2+a-2}+2a^2-4=0$ удовлетворяет условию $x_1x_2 \geq 5a-6$.

М-10-2

1. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{x+|x|}{x+1} \right)^2 + \frac{2x}{x+1} - 6 = 0;$ б) $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1.$

2. Решите неравенство: $\frac{5-|x|}{x^2+|x|-2} \geq \frac{|x|-5}{x^2-1}.$

3. Пусть $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 3$. Покажите, что $\frac{f(3+\sqrt{2})-f(3-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ - целое число.

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 6x^2 - xy - 12y^2 = 0 \end{cases}$$

5. Для каждого значения параметра решите неравенство:

$$ax^2 + (2a - 3)x + a + 1 \leq 0$$

6. Три различных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Эти же числа являются соответственно третьим, тринадцатым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа, если их сумма равна 124.

М-10-3

№1. Вычислить $(-0,2)^0 \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)^{-0,25} \cdot (1,2)^{-1} \cdot \sqrt{(0,01)^{-3}}$.

№2. Решить уравнение $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

№3. Выполнить действия $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{\sqrt{x} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - y\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}\right)^{-1} - \frac{2y}{x-y}$.

№4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{|x-2|-x}{|x-3|-1} \leq 2, \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{x-1}{x-3}\right) : \left(\frac{1}{\frac{x+2}{x+3} - \frac{1}{3}} + 1\right) \geq 0. \end{cases}$$

№5. Прямая $y = 2x - 1$ касается параболы $y = x^2$. Известно, что прямая $y = ax + b$ перпендикулярна этой прямой и также касается параболы. Найти $\frac{a}{b}$.

№6. Найти все пары чисел $(x; y)$, для которых выполняется равенство

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 3y^2 + 9} + (4x^2 + 5xy - 6y^2)^2 = 0.$$

№7. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её первый член, удвоенное произведение первого на третий и третий член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

М-10-4

1. Выполнить действия: $\left(\frac{m-n}{m^{\frac{3}{4}} + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}} - \frac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^{-\frac{1}{2}}$

2. Решить уравнения: а) $|x^2 - 3x| + x = 2$

б) $\frac{1}{2\sqrt{3x-2}-3} + \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}-1} = 3$

3. Решить неравенства: а) $\frac{x^2 + 3x - 13}{(x+3)(x-2)} \geq 2$

б) $(x^2 + 5x - 6)\sqrt{x^3 + 200} \leq 0$

4. Найти все значения параметра a , при которых трехчлен $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3$ имеет 2 различных корня одного знака.

5. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый 6.

М-10-5

№1 . Решить уравнения $a) 36x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 25 = 0;$

$б) (x+6)(x+3)(x-1)(x-2) = 12x^2$

№2 . Решить неравенство $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} \leq 1$

№3 . Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 5y = -4 \\ 2x^2 + 6y^2 - 2x - 15y = -6 \end{cases}$

№4 . Вычислить $\sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{4-2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{29-6\sqrt{6}}{4+2\sqrt{3}}} - \sqrt{2}$

№5 . Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую. Сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних - 24.

№ 6 . При каких значениях «а» корни уравнения различны и отрицательны $(a-1)x^2 - (2a+3)x + a - 7 = 0$

М-10-6

№1. Решить уравнение

а) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x \cdot (x^2 - 4x - 9)$

б) $(x + 1) \cdot \sqrt{1 + 4x - x^2} = x^2 - 1$

№2. Решить неравенства

а) $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5};$

б) $\frac{2x^2+3}{x^2+x} + \left| \frac{4x^2+6}{x^2+x} \right| < 6$

№3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{2}{3} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

№4. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой, одиннадцатый члены этой прогрессии различны и являются соответственно первым, вторым, десятым членами арифметической прогрессии. Найдите первый член геометрической прогрессии.

№5. Найти значения параметра «а», при которых уравнение $\frac{x+|2x+6|}{x^2+8x+12} = a$ имеет ровно один корень. Для данных «а» решить уравнение.

М-10-7

1. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

2. Упростить $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : ((x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})^{-1} + (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^{-1})^{-2}$

3. Решить уравнение $\frac{x^2-12x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-10x+15}$

4. Решить неравенство $(x+1) \cdot \sqrt{\frac{x+4}{x+7}} \leq 0$

5. Найти множество значений функции $f(x) = \frac{1}{2x^2-4x+7}$

6. Решить задачу

Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30; четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что все её члены различны.

М-10-8

1) Решить уравнение

а) $(x^2+2x)^2 - (x+2)(2x^2-x) = 6(2x-1)^2$

б) $(x^2-6x-9)^2 = x(x^2-4x-9)$

2) Решить неравенство $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} \leq 7$

3) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 13(x-y) = 0 \end{cases}$$

4) Найти четыре числа из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равен 32, а сумма средних 24.

5) Вычислить $\left(\frac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-4} - \frac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3} - 2 + \sqrt{19} \right) (2 - \sqrt{13})$

6) Найти все значения a , при которых корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + a + 1 = 0$ больше чем 1

М-10-9

№1. Вычислить $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2} \right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5} \right)^3} \right)^{\frac{1}{2}} + 1$.

№2. Решить уравнение $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) - 1 = 0$.

№3. Упростить выражение и указать область его определения

$$\frac{3}{3x - 4\sqrt{x} - 20} : \left(\frac{5}{\sqrt{x} + 1} + \frac{5}{10 - 3\sqrt{x}} + \frac{53 - 12\sqrt{x}}{3x - 7\sqrt{x} - 10} \right) + \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2x + 3\sqrt{x} - 2}.$$

№4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} x^3 + \frac{50x^2 + x - 7}{x - 7} \leq 1 - 8x^2, \\ |x^2 + 5x + 6| \leq |x + 6|. \end{cases}$$

№5. При каких положительных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найти координаты этой точки и построить данные графики в одной системе координат.

№6. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, для которых выполняется равенство

$$(x-3)(xy+5)=5$$

№7. Числа $a_1; a_2; a_3$ образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти эти числа, если известно, что $a_1 - d = 7$.

М-10-10

1. Упростить выражение и указать область допустимых значений переменной

$$\left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{4x+1} \right) \cdot (1-2\sqrt{x})^{-2}$$

2. Решить уравнения:

$$a) (x^2 + 2x - 4) \cdot \sqrt{x^2 + 7x + 10} = 0; \quad б) \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$$

$$3. \text{Решить систему неравенств: } \begin{cases} \frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{1}{x} \\ \frac{-x^2+20x-100}{x^2-5|x|+4} \geq 0 \end{cases}$$

4. Между числами 24 и -4 вставить пять чисел, которые вместе с заданными числами образуют арифметическую прогрессию.

5. Построить график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определить, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

6. Найти значения параметра a , при которых неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ верно при любом x .

М-10-11

№1. Сравнить A и B , если

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25})}{25(5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2})} \quad \text{и} \quad B = \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} - 5 \cdot (0,125)^0}{(0,2)^{-2} \cdot (0,25)^{-3}} - \frac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot (0,1)^{-2} + (0,5)^{-2}}.$$

№2. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{4-|x+1|}}{x+2} + \sqrt{\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x-4}}$.

№3. Решить уравнения:
 1) $\frac{24}{x^2-2x} = \frac{12}{x^2-x} + x^2 - x$;
 2) $1 + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2-2x+1}$.

№4. Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x}+13}{x-5\sqrt{x}+4}; \\ x^2-2x-3|x-1|-3 \leq 0. \end{cases}$

№5. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

№6. Известно, что парабола со старшим коэффициентом, равным 1, касается прямых $y = x$ и $y = 1-x$. Построить эту параболу и определить изменение y , если $-2 < x \leq 1$.

М-10 -12

1. Вычислить $\sqrt{1,25} + \sqrt{80} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}$.

2. Упростить $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \left(\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} + \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} \right)^{-2}$

3. Решите уравнения

а) $x^2 + 5x + 6 = 15 \cdot \frac{x^2+3x+6}{x^2+x}$; б) $\left(\frac{x+|x|}{x+1} \right)^2 + \frac{2x}{x+1} - 6 = 0$.

4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2}{2x^2+x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+3} + 1 > 0; \\ \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \geq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}. \end{cases}$$

5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} -\frac{x+2}{x+1} \text{ при } x \leq -2; \\ -x-2 \text{ при } -2 < x < 1; \\ 6x-x^2-8 \text{ при } x \geq 1, \end{cases}$

и, используя его, определите множество значений функции, а также решите уравнение $f(x) = a$ при $a = -3$, $a = 1$.

6. Для каждого значения параметра решите уравнение

$$\frac{(x-4)(x+a)}{x^2-(2a-2)x-2a+1} = 0.$$

1. Упростить выражение и указать область допустимых значений переменной

$$\left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{4x+1} \right) \cdot (1 - 2\sqrt{x})^{-2}$$

2. Решить уравнения:

$$\text{а)} (x^2 + 2x - 4) \cdot \sqrt{x^2 + 7x + 10} = 0; \quad \text{б)} \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$$

$$\text{3. Решить систему неравенств: } \begin{cases} \frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{1}{x} \\ \frac{-x^2+20x-100}{x^2-5|x|+4} \geq 0 \end{cases}$$

4. Между числами 24 и -4 вставить пять чисел, которые вместе с заданными числами образуют арифметическую прогрессию.

5. Построить график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определить, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

6. Найти значения параметра a , при которых неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ верно при любом x .