

Примерные задачи для устного зачета по математике для поступающих в 9 физ-мат класс

1. Сумма боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равна b , а сумма ее оснований равна a . Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке T . Найти MT .
2. Единичный квадрат повернули на 45° вокруг его вершины. Найти площадь общей части двух получившихся квадратов.
3. Внутри треугольника ABC взяли треугольник $A_1B_1C_1$ так, что его стороны соответственно параллельны сторонам данного треугольника. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.
4. Дано n целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать одно или несколько чисел так, что их сумма разделится на n .
5. Дежурный может охранять объект либо весь день, либо всю ночь, либо целые сутки. В первом случае ему предоставляется отдых не менее суток, во втором случае – не менее 1,5 суток, а в третьем – не менее 2,5 суток. Каким наименьшим количеством дежурных можно обойтись при этих условиях?
6. Дано: $a > b > c$. Доказать: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0$.
7. За два года население городка увеличилось на 44%. На сколько процентов увеличивалось население ежегодно (предполагается, что каждый год процент прироста населения одинаков)?
8. Построить графики функций: а) $y = -\frac{x+2}{x+3}$; б) $y = \left| \frac{x+2}{x+3} \right|$; в) $y = \frac{1}{|x|+3} - 1$.
9. Составить квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + x - 3 = 0$.
10. Доказать, что произведение 99 дробей $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, где $k=2;3;\dots;100$, больше $\frac{2}{3}$.

Примерные задачи по математике для поступающих в 9 физ.-мат. класс

1. Какое количество воды надо добавить к 100 г 70%-ной уксусной эссенции, чтобы получить 5%-ный раствор уксуса?
2. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений переменной n : $\left(\frac{2}{2m-n} + \frac{6n}{n^2-4m^2} - \frac{4}{2m+n} \right) : \left(1 + \frac{4m^2+n^2}{4m^2-n^2} \right)$.
3. Какое из чисел больше и почему: $\sqrt{101} + \sqrt{103}$ или $\sqrt{99} + \sqrt{105}$ (калькулятором пользоваться нельзя)?
4. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.
5. Решите уравнение $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$.
6. Верно ли, что если $a < 2$ то $\frac{6}{a} > 3$? Ответ обоснуйте.
7. Решите неравенство $\frac{3+8x}{2x-5} > 4$.
8. Постройте графики функций: а) $y = 4x - x^2$; б) $y = 4 \cdot |x| - x^2$; в) $y = |4x - x^2|$.
9. Две высоты ромба, проведенные из вершин его тупых углов, пересекаясь, делятся в отношении 1:2. Найдите углы ромба.
10. Основания трапеции равны 6 см и 26 см, а боковые стороны – 12 см и 16 см. Найдите высоту трапеции.
11. Упростите выражение: $\frac{a^4 - 3a^2 + 1}{a^3 - 27} : \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + 3a + 9}$. Вычислите его значение при $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
12. Вычислите: $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.
13. Найдите все корни уравнения $x^2 + x + \sqrt{6} - 6 = 0$, удовлетворяющие условию $x < \sqrt{2}$.
14. Решите неравенство: $\sqrt{5-x} \cdot (x+3) \leq 0$.
15. Известно, что $a+b=2$. Докажите, что $a^4+b^4 \geq 2$.
16. Постройте график функции $y = x \cdot |x| - 3$.
17. Расстояние от точки А, взятой внутри угла в 60° , до его сторон равны 2 см и 11 см. Найдите расстояние от точки А до вершины угла.
18. Постройте трапецию по боковым сторонам, основанию и разности углов при основании.

19. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?
20. Дано число $a_0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$. Пусть a_1 - сумма его цифр, a_2 - сумма цифр числа a_1 , a_3 - сумма цифр числа a_2 и так далее. Найдите a_{10} .
21. Пусть $a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}$. Найдите $a^3 - \frac{1}{a^3}$.
22. Упростите выражение: $(2 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.
23. Сравните числа $\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$ и $\sqrt{10}$.
24. Решите уравнение: $|x^2 - x - 8| = -x$.
25. Не вычисляя корней квадратного уравнения $3x^2 + 8x - 1 = 0$, найдите $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, где x_1 и x_2 - корни данного уравнения.
26. С аэродрома одновременно вылетели два самолета: один - на запад, другой - на юг. Через два часа расстояние между ними было 2000 км. Найдите скорости самолетов, если скорость одного составляла 75% скорости другого.
27. Докажите неравенство: $|a - 1| + |a - 2| \geq 1$.
28. Найдите наибольшее целое x , удовлетворяющее неравенству: $\frac{2x^2 - 5x + 3}{6} - \frac{4 - x}{12} \geq \frac{15 + x^2}{3} - \frac{1 - 2x}{9}$.
29. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7 < 2x + 1 < 11 \\ \frac{x + 2}{x - 5} < \frac{x - 6}{x - 3} \end{cases}$.
30. Упростите выражение $\frac{\frac{1}{2} - x^{-1}}{4 - \left(\frac{1}{x}\right)^{-2}} : \left(\frac{(2 + x)^{-1}}{2^{-2}} - 2x^{-1} - 1\right)$ и найдите его значение при $x = -\frac{1}{2}$.
31. Сумма боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равна b , а сумма ее оснований равна a . Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке T . Найдите MT .
32. Единичный квадрат повернули на 45° вокруг его вершины. Найти площадь общей части двух получившихся квадратов.
33. Внутри треугольника ABC взяли треугольник $A_1B_1C_1$ так, что его стороны соответственно параллельны сторонам данного треугольника. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.
34. Дано n целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать одно или несколько чисел так, что их сумма разделится на n .
35. Дежурный может охранять объект либо весь день, либо всю ночь, либо целые сутки. В первом случае ему предоставляется отдых не менее суток, во втором случае - не менее 1,5 суток, а в третьем - не менее 2,5 суток. Каким наименьшим количеством дежурных можно обойтись при этих условиях?
36. Дано: $a > b > c$. Докажите: $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) > 0$.
37. За два года население городка увеличилось на 44%. На сколько процентов увеличивалось население ежегодно (предполагается, что каждый год процент прироста населения одинаков)?
38. Построить графики функций: а) $y = -\frac{x + 2}{x + 3}$; б) $y = \left| \frac{x + 2}{x + 3} \right|$; в) $y = \frac{1}{|x| + 3} - 1$.
39. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + x - 3 = 0$.
40. Докажите, что произведение 99 дробей $\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$, где $k = 2; 3; \dots; 100$, больше $\frac{2}{3}$.
41. Шахматная доска (8×8) выкрашена в белый цвет. За один шаг разрешается любой трехклеточный прямоугольник доски перекрасить, поменяв цвета клеток этого прямоугольника: белые - на черные, а черные - на белые. Удастся ли за несколько шагов перекрасить доску в черный цвет?
42. Найдите десять различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.
43. На окружности по порядку стоят девять точек: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Найдите сумму углов звездочки $ACEGIBDFH$.
44. С помощью циркуля и линейки постройте общую касательную к двум данным окружностям.
45. Докажите, что при всех натуральных n число $(n + 1)^4 + 4$ составное.
46. Постройте график функции $y = \left| |x - 1| - 4 \right| + 2$.

47. Упростите: $\sqrt{9 + \sqrt{12} - \sqrt{20} - \sqrt{60}} - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

48. Решите систему уравнений относительно $(x; y)$:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$
.

49. Имеется 10 мешков с монетами. В девяти мешках монеты настоящие (по 10 г), а в одном мешке – фальшивые (по 11 г). Одним взвешиванием определить, в каком мешке фальшивые монеты.

50. 15 журналов лежат на столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать восемь из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее $7/15$ площади стола.

51. Вычислите $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2} + \frac{a-3b}{a^2-b^2}\right) \cdot \frac{a^2+3b}{a^3-a^2b-ab^2+b^3}$ при $a = \sqrt{3}, b = 1,7$.

52. Решите уравнение $4x^2 - 2|2x - 1| = 34 + 4x$.

53. Решите неравенство $(x+5)(3x^2-3x+1) > (x+5)(x^2+2x-1)$.

54. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} |x-3| \leq 5-x \\ \frac{3x-5}{x-1} < 2 \end{cases}$$
.

55. Сравните числа $a = (\sqrt{6} + \sqrt{3})\sqrt{12} - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ и $b = \left[\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right]^{-2} \cdot (1 + \sqrt{3,5})^2$.

56. При каком значении параметра m является наибольшей сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2-1,5=0$?

57. Два тракториста могут вспахать поле на 18ч быстрее, чем один первый тракторист, и на 32ч быстрее, чем один второй. За сколько часов может вспахать поле каждый тракторист, работая один?

58. Решите уравнение $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4b}{x^3+8}$ (b - параметр).