Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 119
Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответов. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 задания повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2. Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 записан под правильным номером.

***ЖЕЛАЕМ УСПЕХА*!**

Справочные материалы

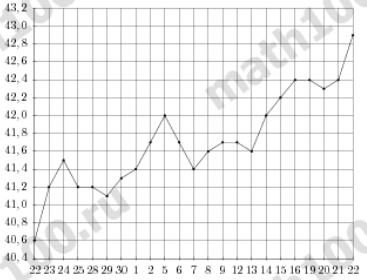
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке. Единицы измерения писать не нужно.

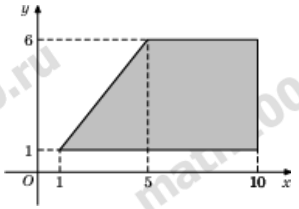
Часть 1

1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 70 копеек. Счетчик электроэнергии 1 августа показывал 24639 киловатт-часов, а 1 сентября показывал 24831 киловатт-час. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за август?

2. На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период курс евро был ровно 42,4 рубля.



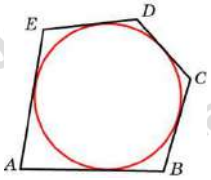
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1;1), (10;1), (10;6), (5;6).



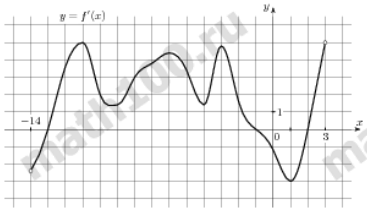
4. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

5. Решите уравнение $\log_2^2 x = \log_2^2(4x) - 8.$

6. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-14;3)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



8. От треугольной пирамиды, объем которой равен 15, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

Часть 2

9. Найдите значение выражения:

$$x \cdot 2^{-2x-2} \cdot 4^x + 3x \cdot \left(6x^{10}\right)^3 : \left(6x^6\right)^5 \quad \text{при} \quad x = 3$$

10. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин^2, и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

11. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

12. Найдите точку максимума функции $y = (9 - x)e^{x+9}$

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение

$$\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{5}; \sqrt{5}\right]$.

14. На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как $1:2$.

а) Пусть MN — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде AB. Докажите, что объём одной из пирамид $PABN$ и $PABM$ втрое больше объёма другой.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP, если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7.

15. Решите неравенство:

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\frac{1}{3^x-2}+\frac{1}{3^{x+1}-1}.$$

16. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Около треугольников ACM и BCM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник O_1MO_2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AC=72$, $BC=96$.

17. Макар является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Макар платит рабочему 300 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе,—200 рублей. Макар готов выделять $30\,000\,000$ рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$.

19. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?