Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант № 115

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответов. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 задания повышенного и высокого уровня сложности с развѐрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2. Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чѐрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 записан под правильным номером.

***ЖЕЛАЕМ УСПЕХА*!**

Справочные материалы

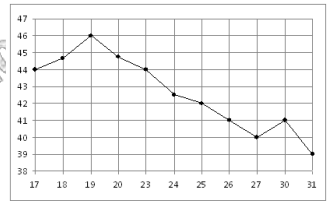
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке. Единицы измерения писать не нужно.

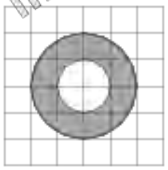
Часть 1

1. Установка двух счѐтчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счѐтчиков Александр платил за воду (холодную и горячую) ежемесячно 800 рублей. После установки счѐтчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 300 рублей при тех же тарифах на воду. За какое наименьшее количество месяцев при тех же тарифах на воду установка счѐтчиков окупится?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



3. На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 14. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



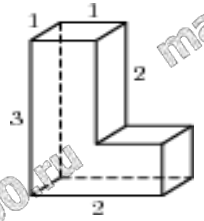
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орѐл выпадет все три раза.

5. Решите уравнение $\sqrt{2x+5}=x+1$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их произведение.

6. В тупоугольном треугольнике ABC $AC=BC$, высота AH равна 24, $CH=7$. Найдите $\cos ACB$.

7. Прямая $y=2x+2$ является касательной к графику функции $y=x^2-4x+c$. Найдите c.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{11-4\sqrt{7}}}{\sqrt{12}}$

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A=\alpha\rho g r^3$, где $\alpha=4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho=1000\,\text{кг}/\text{м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g=10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем $336\,000$ Н? Ответ выразите в метрах

11. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=18x-\ln(18x)+11$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{36};\dfrac{5}{36}\right]$

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чѐтко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение

$$3\log_8^2(\sin x)-5\log_8(\sin x)-2=0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

14. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Точка M — центр боковой грани BCC_1B_1.

а) Постройте точку пересечения прямой A_1M с плоскостью ABC.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой AB_1, если призма прямая, ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C, а диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 17 и 15 соответственно.

15. Решите неравенство:

$$\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0.$$

16. Окружность вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны CD в точке M. Луч AM вторично пересекает окружность в точке N, а прямую BC – в точке K, причём $AN=4$, $MN=12$.

а) Докажите, что $\angle AMD=\angle MCK$.

б) Найдите основания трапеции.

17. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^{14}x+\left(a-3\sin x\right)^7+\sin^2 x+a=3\sin x$$

имеет хотя бы один корень.

19. Из первых 22 натуральных чисел $1,2,\ldots,22$ выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.