Блок 2. Задачи с текстовым условием

1. Мастер делает за один час целое число деталей, большее 5, а ученик – на 2 детали меньше. Мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе – на час быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

2. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса дольше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, она бы закончила работу на 2 часа раньше второй. Определите число землекопов в каждой бригаде, если производительность землекопов одинакова.

3. Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

4. На факультет от школьников подано на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производственников в n раз, причем $6 \le n \le 12$ (n – целое число). Определить общее количество заявлений, если среди производственников юношей на 20 больше, чем девушек.

5. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число абитуриентов, экзаменовавшихся каждый день в каждой из аудиторий, было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

6. Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата. а) Могло ли N равняться 2? б) Могло ли N равняться 10? в) Каково наибольшее возможное значение N?

7. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают. а) Может ли в результате получиться 0? б) Может ли в результате получиться 1? в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

8. Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовём такие куски стандартными). а) Некоторый моток верёвки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки? б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

9. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино. а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся? б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся? в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

10. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

11. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024. а) Может ли последовательность состоять из двух членов? б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

12. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345. а) Может ли последовательность состоять из двух членов? б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

13. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

14. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –18. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

15. Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740. а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов? б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

16. В течение четверти учитель ставил школьникам отметки “1”, “2”, “3”, “4”, “5”. Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4,7. а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика? б) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика, если среди этих отметка есть отметка “1”? в) Учитель заменил четыре отметки “3”, “3”, “5”, “5” двумя отметками “4”. На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок ученика после такой замены?

17. По окружности расставлено 40 ненулевых целых чисел с общей суммой 16. Любые два стоящие рядом числа отличаются не более чем на 6 и никакие четыре отрицательные числа не стоят подряд. а) Среди этих 40 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных. б) Среди этих 40 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

18. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11. а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8. б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22? в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

19. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10. а) На доске выписан набор –9, –6, –4, –3, –1, 2, 5. Какие числа были задуманы? б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано? в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

20. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10. а) На доске выписан набор –13, –8, –6, –5, –1, 2, 7. Какие числа были задуманы? б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано? в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

21. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10. а) На доске выписан набор –5, –2, 1, 3, 4, 6, 9. Какие числа были задуманы? б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано? в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

22. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10. а) На доске выписан набор –3, –1, 1, 2, 3, 4, 6. Какие числа были задуманы? б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано? в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

23. а) Чему равно число способов записать число 1193 в виде $1193 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$? б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами? в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами?

24. а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1595 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$? б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами? в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

25. В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102? б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162? в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

26. Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что её второй член в 8 раз больше первого. а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого её члена в 567 раз? б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом. в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из её членов равен 546.

27. Известно, что все члены последовательности $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что из следующих четырёх утверждений ровно три истинны, а одно – ложно: 1) $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия; 2) $\{a_n\}$ – геометрическая прогрессия; 3) a_2 больше a_1 в 8 раз; 4) a_3 больше a_1 в 15 раз. Найдите, обосновав ответы: а) номер ложного утверждения; б) наименьшее возможное отношение двух членов этой последовательности, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом; в) третий член этой последовательности, если дополнительно известно, что один из её членов равен 791.

28. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

29. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

30. На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц. а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162. б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить четверками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162. в) Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

31. На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц. а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108. б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить семёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108. в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

32. Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 12. При подсчете рейтинга используется одна из двух моделей. В модели *A* учитываются все оценки экспертов, рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели *B* отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов, рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок. а) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{25}$? б) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$? в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

33. Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 10. При подсчете рейтинга используется одна из двух моделей. В модели *A* учитываются все оценки экспертов, рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели *B* отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов, рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок. а) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{30}$? б) Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$? в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

34. Из натуральных нечетных чисел от 11 (включительно) до 67 (включительно) выбирают в порядке возрастания семь произвольных. Пусть R_A – среднее арифметическое всех семи выбранных чисел, R_B – четвертое из выбранных чисел в порядке возрастания. а) Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{7}$?

б) Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{2}{7}$? в) Найдите наибольшее возможное значение разности $R_A - R_B$.

35. Из натуральных нечетных чисел от 1 (включительно) до 59 (включительно) выбирают в порядке возрастания семь произвольных. Пусть R_A – среднее арифметическое всех семи выбранных чисел, R_B – четвертое из выбранных чисел в порядке возрастания. а) Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{7}$? б) Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{2}{7}$? в) Найдите наибольшее возможное значение разности $R_A - R_B$.

Ответы. 1. 24. **2.** 24 и 25. **3.** 132. **4.** 832. **5.** 432. **6.** а) да; б) нет; в) 9. **6.** а) нет; б) нет; в) 4. **8.** а) 23; б) 2645. **9.** а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$. **10.** а) нет; б) нет; в) да. **11.** а а) нет; б) да; в) 549. **12.** а) нет; б) да; в) 477. **13.** а) 44; б) отрицательных; в) 17. **14.** а) 36; б) отрицательных; в) 16. **15.** а) да; б) нет. 1**6.** а) 10; б) 20; в) $\frac{7}{90}$. **17.** а) 37; б) 10. **18.** а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22. **19.** а) –6, –3, 5; б) 5; в) нет. **20.** а) –8, –5, 7; б) 7; в) нет. **21.** а) –5, 3, 6; б) 6; в) нет. **22.** а) –3, 2, 4; б) 5; в) нет. **23.** а) 120; б) да; в) 20. **24.** а) 160; б) да; в) 20. **25.** а а) нет; б) нет; в) 38. 2**6** а) 2; б) 8; в) 1638 или 21. **27.** а) 2; б) 8; в) 11865 или 105. **28.** а) нет; б) нет; в) да. **29.** а) нет; б) нет; в) да. **30** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot 1\cdot 4$. **31.** а) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+7+1)\cdot(1+7+1)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1)\cdot(7+1)$. **32.** а) нет; б) да; в) $\frac{6}{7}$. **33.** а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$. **34.** а) нет; б) да; в) $\frac{132}{7}$. **35.** а) нет; б) да; в) $\frac{142}{7}$.