

Планиметрическая задача

Ответами к заданиям являются слово, словосочетание, число или последовательность слов, чисел. Запишите ответ без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

- 1 Равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность радиуса R, $\angle ABC = \alpha$. Параллельно основанию AC проведена средняя линия, продолженная до пересечения с окружностью в точках P и K.
- $$BH = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$
- а) Докажите, что высота BH треугольника ABC
- б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника KBP, если $\angle ABC = 120^\circ$.
-
- 2 В выпуклом пятиугольнике ABCDE диагонали BE и CE являются биссектрисами неравных углов при вершинах B и C соответственно.
- а) Докажите, что точка E есть центр вписанной или невписанной окружности треугольника OCB, где O — точка пересечения прямых CD и AB.
- б) Найдите площадь пятиугольника ABCDE, если $\angle A = 37^\circ$, $\angle D = 143^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 13.
-
- 3 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.
- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника АКВ, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.
-
- 4 В выпуклом четырёхугольнике ABCD на сторонах AD и CD взяты точки M и N, такие, что каждая из прямых CM и AN делит ABCD на две фигуры равных площадей.
- а) Докажите, что AC параллельно MN.
- б) Найдите отношение площадей четырёхугольников ABCD и ABCO, где O — точка пересечения BD и MN.
-
- 5 Внутри прямого угла AOB проведён луч OC. В угол BOC вписана окружность, касающаяся лучей OB и OC в точках B и C соответственно, в угол AOC вписана окружность, касающаяся лучей OA и OC в точках A и C соответственно. Радиус одной из этих окружностей в 4 раза больше радиуса другой.
- а) Докажите, что $OA = OB$.
- б) Найдите косинус меньшего из углов AOC и BOC.
-
- 6 Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, а продолжение стороны AC эта прямая пересекает в точке P.
- $$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$
- а) Докажите, что
- б) Найдите, в каком отношении точка M делит сторону AB, если $BC : BN = 7 : 5$ и $AC : CP = 8 : 3$.
-
- 7 Диагонали AC и BD трапеции ABCD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O, причём $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.
- а) Докажите, что трапеция ABCD равнобедренная.
- б) Найдите радиус описанной вокруг трапеции окружности, если основания трапеции равны 6 и 8.

- 8 В равнобедренную трапецию вписана окружность.
- а) Докажите, что диаметр окружности есть среднее пропорциональное между параллельными сторонами.
- б) Найдите радиус этой окружности, если площадь трапеции равна 52, а параллельные стороны относятся как 3 : 5.
-

- 9 Внутри прямого угла AOB проведён луч OC . В угол BOC вписана окружность, касающаяся лучей OB и OC в точках B и C соответственно, в угол AOC вписана окружность, касающаяся лучей OA и OC в точках A и C соответственно. Радиус одной из этих окружностей в 4 раза больше радиуса другой.
- а) Докажите, что $OA = OB$.
- б) Найдите косинус меньшего из углов AOC и BOC .
-

- 10 Радиусы двух окружностей с центрами O_1 и O_2 , касающихся внутренним образом в точке A , равны 5 и 4 соответственно. Их общая секущая, проведённая через точку A , пересекает первую окружность в точке B , вторую — в точке C .

а) Докажите, что $\frac{AB}{AO_1} = \frac{BC}{O_1O_2}$.

- б) Найдите длину касательной, проведённой из точки B ко второй окружности, если дополнительно известно, что $AB = 1$.
-

1

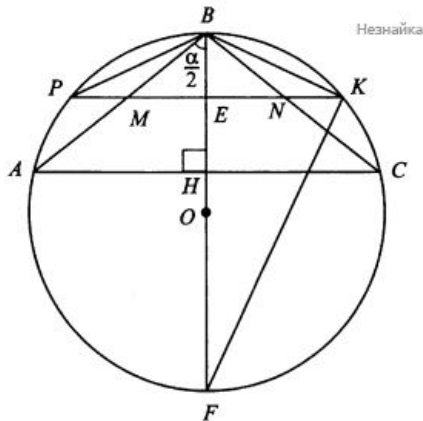
Решение:

$\triangle ABC$

а) В по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R, \frac{AC}{\sin \alpha} = 2R, AC = 2AH, 2AH = 2R \sin \alpha, AH = R \sin \alpha$$

(см. рисунок)



$$\triangle ABH \quad \operatorname{tg} \angle ABH = \frac{AH}{BH}, AH = BH \times \operatorname{tg} \angle ABH = BH \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$R \sin \alpha = BH \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Имеем

$$BH = \frac{2R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

, что и требовалось доказать

$$б) S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 2R \sin \alpha \times 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

$$S_{KBP} = \frac{1}{2} PK \times BE.$$

По условию MN - средняя линия $\triangle ABC$? значит $BE = \frac{1}{2} BH = R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BKF по свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла $KE^2 = BE \times FE = R \cos^2 \frac{\alpha}{2} (2R - R \cos^2 \frac{\alpha}{2}) = R^2 \cos^2 (1 + 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) = R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2})$.

$$PK = 2KE = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

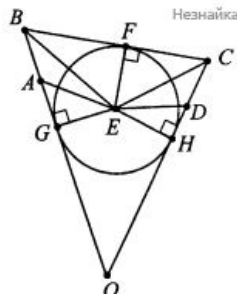
$$S_{KBP} = \frac{1}{2} \times 2R \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \times R \cos^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KBP}} = \frac{2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{R^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

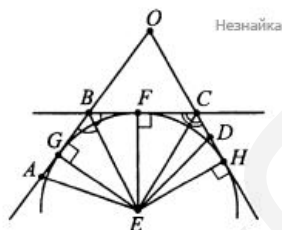
По условию $\alpha = 120^\circ$,

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

а) Пусть точки O и E расположены по одну сторону от прямой BC (см. рисунок), то есть $\angle B + \angle C = 180^\circ$, тогда BE и CE являются биссектрисами внутренних углов при вершинах B и C соответственно треугольника BCO . По свойству биссектрисы BE точка E равноудалена от сторон BO и BC . Аналогично по свойству биссектрисы CE точка E равноудалена от сторон BC и OC . Следовательно, точка E равноудалена от всех сторон треугольника BCO и является центром окружности, вписанной в этот треугольник.



рассмотрим другой случай. Пусть точки O и E расположены по разные стороны от прямой BC (см. рисунок ниже), то есть $\angle B + \angle C > 180^\circ$, тогда BE и CE являются биссектрисами внешних углов при вершинах B и C соответственно треугольника BCO . По свойству биссектрисы BE точка E равноудалена от прямых BO и BC . Аналогично точка E равноудалена от прямых BC и OC . Следовательно, точка E равноудалена от стороны BC и продолжений сторон BO и OC треугольника BCO и является центром внеписанной окружности этого треугольника. EG, EF, EH — радиусы этой окружности.



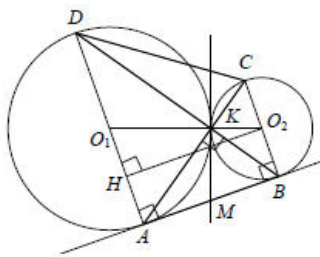
б) Сумма углов выпуклого пятиугольника равна 540° . По условию задачи $\angle A = 37^\circ, \angle D = 143^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Если $\angle B + \angle C < 180^\circ$, что противоречит условию выпуклости пятиугольника. Значит $\angle B + \angle C > 180^\circ$, поэтому: $\triangle AGE = \triangle DHE$ по катету и острому углу. Аналогично $\triangle EHC = \triangle EFC$. Последовательно имеем:

$$S_{ABE} + S_{CDE} = S_{AGE} + S_{GBE} + S_{CHE} - S_{DHE} = S_{GBE} + S_{CHE} = S_{BFE} + S_{FCE} = S_{BCE} = 13$$

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{CDE} + S_{BCE} = 13 + 13 = 26$$

Ответ: 26

а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

Вычислим площадь трапеции ABCD. Проведём к AD перпендикуляр O_2H , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4$$

Тогда
Решение:

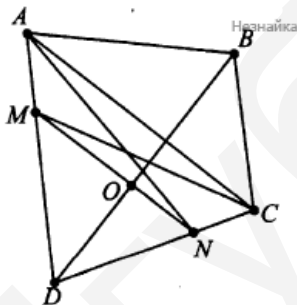
$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \times AB = 20$$

$$S_{AND} = S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 10$$

Из условия следует, что $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$ (см. рисунок)

Но тогда для треугольников AND и MCD с общим углом D имеем

Ответ: 3,2
 $\frac{1}{2} AD \times ND \times \sin \angle D = \frac{1}{2} MD \times CD \times \sin \angle D$ или $\frac{AD}{MD} = \frac{CD}{ND}$. Следовательно, треугольники MND и ACD подобны по второму признаку подобия, из чего следует, что $AC \parallel MN$.

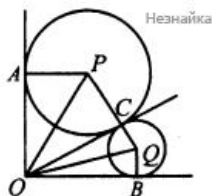


б) Так как $AC \parallel MN$, то точки O и N равноудалены от прямой AC, а значит, высоты треугольников AOC и ANC равны, поэтому их площади также равны. Следовательно, $S_{ANCB} = S_{ABC} + S_{AOC} = S_{ABCO}$, но S_{ANCB} по площади составляет половину от S_{ABCD} , поэтому и S_{ABCO} составляет половину от S_{ABCD} по площади.

Ответ: 2:1

5 Решение:

а) Не нарушая общности, можем считать, что большая окружность вписана в угол AOC. Пусть $CQ = r$; $PC = 4r$. так как окружность с центром P вписана в угол AOC, то $PA \perp OA$, $PC \perp OC$, $OA = OC$ как отрезки касательных, проведенные из одной точки. аналогично $OC = OB$, тогда $OA = OB$, что и требовалось доказать.



Из того, что PO и QO - биссектрисы углов AOC и BOC соответственно, следует, что $\angle POQ = 45^\circ$

Обозначим $OA = OB = OC = x$, тогда $OP = \sqrt{16r^2 + x^2}$, $OQ = \sqrt{r^2 + x^2}$, $PQ = 4r + r = 5r$. Учитывая,

что $\angle POQ = 45^\circ$, по теореме косинусов имеем $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \times OQ \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$16r^2 + x^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{2} \sqrt{16r^2 + x^2} \sqrt{r^2 + x^2} = 25r^2$, решая уравнение относительно x^2 , получим

$$x^2 = \frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{2} r^2$$

$$\cos \angle COQ = \frac{OC}{OQ} = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{35 \pm 5\sqrt{41}}}$$

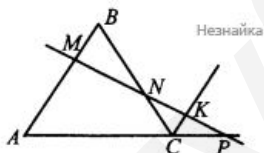
Если $\cos \angle COQ = \sqrt{\frac{33 - 5\sqrt{41}}{35 - 5\sqrt{41}}}$, то, что противоречит тому, что

$$\cos \angle COQ = \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{41}}{35 + 5\sqrt{41}}}$$

Е с л и то

$$6 \quad \cos \angle BOC = \cos(2\angle COQ) = 2\cos^2 \angle COQ - 1 = 2 \times \frac{33 + 5\sqrt{41}}{35 + 5\sqrt{41}} - 1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{10}$$

а) Пусть прямая MN пересекает продолжение стороны AC за точку C . (Случай за точку A абсолютно аналогичен). Проведем через точку C прямую, параллельную AB . Прямая пересекает AP в точке K .



$\triangle AMP \sim \triangle CKP$ по первому признаку. Следовательно $\frac{AM}{CK} = \frac{PA}{PC}$, $CK = \frac{AM \times PC}{PA}$

$\triangle BMN \sim \triangle CKN$. Следовательно $\frac{MB}{CK} = \frac{BN}{NC}$, $CK = \frac{MB \times NC}{BN}$

$$\text{Тогда } \frac{AM \times PC}{PA} = \frac{MB \times NC}{BN} \quad \text{и} \quad \frac{AM}{MB} \times \frac{BN}{NC} \times \frac{PC}{PA} = 1$$

б) $BC:BN = 7:5$. Пусть $BC = 7x$, $BN = 5x$, тогда $NC = 7x - 5x = 2x$ и $\frac{BN}{NC} = \frac{5}{2}$. $AC:CP = 8:3$. Пусть

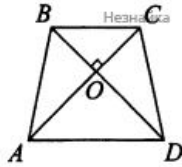
$$AC = 8y; CP = 3y, AP = 11y. \quad \frac{CP}{PA} = \frac{3}{11} \times \frac{AM}{MB} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{11} = 1, \quad \frac{AM}{MB} = \frac{22}{15}$$

Ответ: $\frac{22}{15}$

7 Решение:

а) В трапеции $ABCD$ треугольники AOD и BOC подобны, поскольку $\angle OAD = \angle OCB$ и

$\angle ODA = \angle OBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно (см. рисунок)



Значит, $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$. Умножая почленно это равенство на равенство $AO \times CO = BO \times DO$ из условия задачи, получим $AO^2 = DO^2$. Отсюда $AO = DO$, $BO = CO$ и треугольники AOB и DOC равны по первому признаку. Следовательно $AB = CD$

б) Т.к. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, то вокруг нее можно описать окружность. обозначим ее радиус через R .

Треугольники AOD и BOC - равнобедренные и прямоугольные. Значит $\angle OAD = 45^\circ$ и $CO = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, $DO = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. По теореме синусов для треугольника ACD имеем: $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R$, $R = \frac{CD}{\sqrt{2}}$

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 = \frac{1}{2} (AD^2 + BC^2) = 50$$

Отсюда $CD = 5\sqrt{2}$ и $R=5$

Ответ: 5

8 Решение:

а) Требуется доказать, что $EM^2 = BC \times AD$.

$ABCD$ - равнобедренная трапеция, $AB = DC$

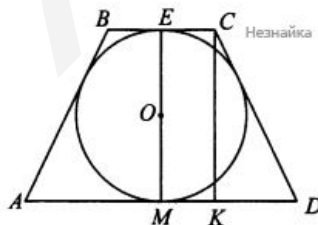
$CK \perp AD$; $CK = EM$.

$\triangle CDK$: $\angle CDK = 90^\circ$, $CK^2 = CD^2 - KD^2$.

Учитывая, что четырехугольник $ABCD$ - описан, имеем $AB + CD = BC + AD$, $2AB = BC + AD$

$$AB = \frac{BC + AD}{2}$$

$$CK^2 = \left(\frac{AD + BC}{2} \right)^2 - \left(\frac{AD - BC}{2} \right)^2;$$



$$CK^2 = \left(\frac{AD + BC}{2} - \frac{AD - BC}{2} \right) \times \left(\frac{AD + BC}{2} + \frac{AD - BC}{2} \right) = BC \times AD.$$

$CK^2 = BC \times AD$, $EM^2 = BC \times AD$. Что и требовалось доказать.

б)

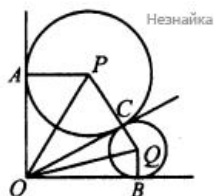
. Пусть , тогда ,,

Поставим в формулу площади трапеции:

Ответ:

9 Решение:

а) Не нарушая общности, можем считать, что большая окружность вписана в угол AOC . Пусть $CQ = r$; $PC = 4r$. так как окружность с центром P вписана в угол AOC , то $PA \perp OA$, $PC \perp OC$, $OA = OC$ как отрезки касательных, проведенные из одной точки. аналогично $OC = OB$, тогда $OA = OB$, что и требовалось доказать.



Из того, что PO и QO - биссектрисы углов AOC и BOC соответственно, следует, что $\angle POQ = 45^\circ$

Обозначим $OA = OB = OC = x$, тогда $OP = \sqrt{16r^2 + x^2}$, $OQ = \sqrt{r^2 + x^2}$, $PQ = 4r + r = 5r$. Учитывая,

что $\angle POQ = 45^\circ$, по теореме косинусов имеем

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \times OQ \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$16r^2 + x^2 + r^2 + x^2 - \sqrt{2}\sqrt{16r^2 + x^2}\sqrt{r^2 + x^2} = 25r^2$, решая уравнение относительно x^2 , получим

$$x^2 = \frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{2} r^2$$

$$\cos \angle COQ = \frac{OC}{OQ} = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{35 \pm 5\sqrt{41}}}$$

Если $\cos \angle COQ = \sqrt{\frac{33 - 5\sqrt{41}}{35 - 5\sqrt{41}}}$, то, что противоречит тому, что

$$\cos \angle COQ = \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{41}}{35 + 5\sqrt{41}}}$$

Е с л и то

$$\cos \angle BOC = \cos (2\angle COQ) = 2\cos^2 \angle COQ - 1 = 2 \times \frac{33 + 5\sqrt{41}}{35 + 5\sqrt{41}} - 1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 + \sqrt{41}}{10}$$

10 Решение:

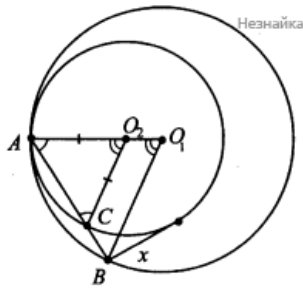
а) Рассмотрим случай, когда прямые BC и O_1O_2 не совпадают. Тогда $\triangle O_2AC$ и $\triangle O_1AB$ - равнобедренные и, следовательно, $\angle O_2AC = \angle O_2CA$, $\angle O_1AC = \angle O_1BC$, но $\angle O_2AC$ - общий, поэтому $\angle O_2AC = \angle O_1AC = \angle O_1BC = \angle O_2CA$ и $\triangle O_2AC \sim \triangle O_1AB$ по двум углам и

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AO_2}{AO_1}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB - AC}{AB} = 1 - \frac{AC}{AB}$$

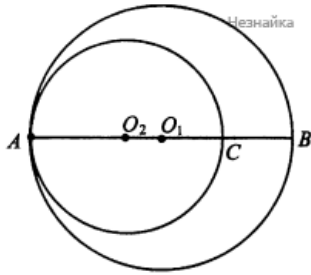
$$\frac{O_1O_2}{AO_1} = \frac{AO_1 - AO_2}{AO_1} = 1 - \frac{AO_2}{AO_1}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{O_1O_2}{AO_1} \quad \text{или} \quad \frac{BC}{O_1O_2} = \frac{AB}{AO_1} \quad (\text{см. рисунок})$$



Рассмотрим случай, когда прямые O_1O_2 и AB совпадают:

$$\frac{AB}{AO_1} = 2; BC = AB - AC = 10 - 8 = 2; O_1O_2 = AO_1 - AO_2 = 1; \frac{BC}{O_1O_2} = 2 = \frac{AB}{AO_1} \text{ (см. рисунок)}$$



$$x^2 = AB \times BC = AB^2 \times \frac{O_1O_2}{AO_1} = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

б) Обозначим x - искомая длина касательной, тогда

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Обо всех неточностях пишите на почту (с указанием темы и формулировки задания): dasha@neznaika.pro

Источник: <http://neznaika.pro/test/math/p/504>