

Задачи с прикладным содержанием

Ответами к заданиям являются слово, словосочетание, число или последовательность слов, чисел. Запишите ответ без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

- 1 Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. (состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 5$ кг и радиуса $R = 8$ см и двух боковых с массами $M = 2$ кг и радиусами $R + h$, где h - добавочная высота цилиндра. При этом момент инерции катушки относительно вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой
- $$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$$
- . При каком максимальном значении добавочной высоты h момент инерции катушки не превышает предельного значения $402 \text{ кг} \cdot \text{с}$. Ответ выразите в сантиметрах.

1

- 2 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4500 \text{ км/ч}^2$. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 90 км/ч .

2

- 3 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^{\frac{0,68K}{r_{\text{пок}} + 0,59}}}$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,85, а оценка экспертов равна 0,1.

3

- 4 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 68 мг. Период его полураспада составляет 12 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 8,5 мг.

4

- 5 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально, и на исследуемом интервале температура определяется по формуле $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 120 \text{ К}$, $b = -1/4 \text{ К/мин}^2$, $a = 39,5 \text{ К/мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1080 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

5

- 6 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 6.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится всемеро, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 7Tr + Q}{A}$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

6

<p>7 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление в газе в паскалях, V — объем газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом ($k = 4/3$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 287500 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, начинают сжимать. Какой наибольший объем V может занимать газ при давлениях p не ниже $4,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.</p>	7 <input type="text"/>
<p>8 Трактор тащит сани с силой $F = 72 \text{ кН}$, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 40 \text{ м}$ вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах), совершённая работа будет не менее 1440 кДж?</p>	8 <input type="text"/>
<p>9 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 12$ молей воздуха при давлении $p_1 = 2,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением</p> $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$ <p>где $\alpha = 5,75 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ — постоянная, $T = 400 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 82800 Дж.</p>	9 <input type="text"/>
<p>10 Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 10 \text{ В}$, частота $\omega = 150^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже чем 5 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?</p>	10 <input type="text"/>
<p>11 В баке, имеющем форму цилиндра, на боковой стенке у дна закреплён кран. После его открытия вода, находящаяся в баке, начинает вытекать, и высота столба воды (м)</p> $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} kt + \frac{g}{2} k^2 t^2$ <p>меняется по закону где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20 \text{ м}$ — начальная высота столба воды, $k = 1/80$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения ($g = 10 \text{ м/сек}^2$). Найдите, через сколько секунд после открытия крана в баке не станет воды.</p>	11 <input type="text"/>
<p>12 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a = -\frac{1}{450} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. Найдите, на каком наибольшем расстоянии в метрах от крепостной стены высотой $12,5 \text{ м}$ нужно установить камнеметательную машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее $0,5 \text{ метра}$.</p>	12 <input type="text"/>
<p>13 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле</p> $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{ \omega_p^2 - \omega^2 },$ <p>где ω — частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 350 \text{ с}^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω (в с^{-1}), меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на $\frac{A_0}{24}$. Ответ выразите в с^{-1}.</p>	13 <input type="text"/>

- 14 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 25$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 до 225 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

14

- 15 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — постоянная, S — площадь поверхности звезды, а T — температура. Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{162} \cdot 10^{23}$ м², а мощность её излучения равна $4,56 \cdot 10^{28}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в градусах Кельвина.

15

- 16 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности ln , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 7. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, информативность публикаций втрое, а оперативность вдвое дороже, чем качество сайта. Таким образом, формула приняла вид:

16

$$y = \frac{3ln + 2Op + 4Tr + Q}{A}$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 2.

- 17 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 24$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,5$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение (в киловольтах) на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 54 с.

17

- 18 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 48$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся

18

формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 16 Ом. Ответ выразите в омах.

- 19 При быстром вращении ведёрка с водой вода из него не будет выливаться. При этом сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления P может быть равной нулю и выражается формулой $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения ($g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать

19

ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м?

20

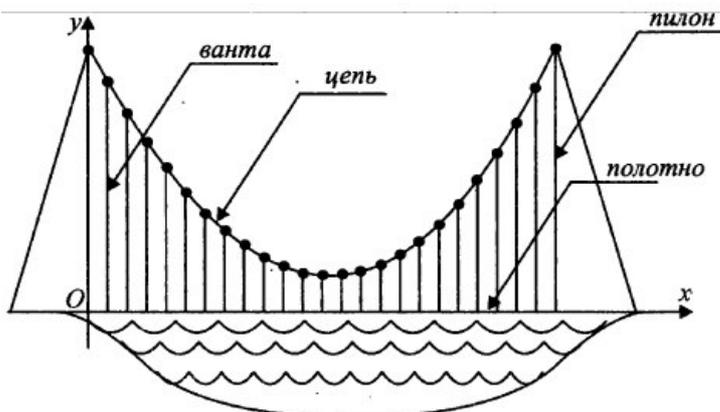
- 20 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 150 - 25p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 104 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

21

- 21 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде; f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц); f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

22

- 22 На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось O_y направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось O_x направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,008x^2 - 0,96x + 45$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 40 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



ОТВЕТЫ

1	3
2	0,9
3	0,7
4	36
5	30
6	13 $R = \frac{4R + R + 7R + R}{A}$ $R \times A = 13R$ $A = 13$
7	0,125
8	60 $1440 = 72 * 40 * \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = 60$
9	20
10	80
11	160
12	90
13	70
14	28,125
15	6000
16	35 Если все показатели максимальны, формула принимает вид: $2 = (3 * 7 + 2 * 7 + 4 * 7 + 7) / A$ $2 = (21 + 14 + 28 + 7) / A$ $2 = 70 / A$ $A = 70 / 2 = 35$
17	6
18	24 $16 = \frac{48R_2}{48 + R_2}$ <small>Незнайка</small> $16 * 48 + 16R_2 = 48R_2$ $32R_2 = 48 * 16$ $R_2 = \frac{24 * 2 * 16}{16 * 2}$ $R_2 = 24$
19	2,7

	$\frac{v^2}{L} - g = \frac{v^2}{0.729} - 10$ $\frac{v^2}{0.729} = 10$
20	$v^2 = 7.29$ $v = \pm 2.7$ <p>$q = 150 - 25p$ $104 = q \times p$ ответ берем положительный, потому что скорость не может быть отрицательной</p> $104 = (150 - 25p)p$ $104 = 150p - 25p^2$ $25p^2 - 150p + 104 = 0$ $D = 15 \times 15 \times 10 \times 10 - 25 \times 4 \times 104 =$ $= 100 (225 - 104) = 100 \times 121$ $\sqrt{D} = 10 \times 11 = 110$ $p_1 = \frac{150 + 110}{50} = 5,2$ $p_{21} = \frac{150 - 110}{50} = 0,8$ $p_{max} = 5,2$
21	751
22	19,4 $y = 0,008x^2 - 0,96x + 45$ $x = 40$ $y = 0,008 \times 40^2 - 0,96 \times 40 + 45 = \frac{1600 \times 8}{1000} - \frac{40 \times 96}{100} + 45 =$ $= \frac{128}{10} - \frac{96 \times 4}{10} + 45 = 12,8 - 38,4 + 45 = 57,8 - 38,4 = 19,4$
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	

36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	

72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	

Обо всех неточностях пишите на почту (с указанием темы и формулировки задания):
dasha@neznaika.pro

Источник: <http://neznaika.pro/test/math/p/143>