Числа и их свойства

Ответами к заданиям являются слово, словосочетание, число или последовательность слов, чисел. Запишите ответ без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

1 Представьте число 85 в виде суммы двух натуральных чисел с равной суммой цифр. В ответе укажите большее из этих двух слагаемых. Если таких представлений в виде суммы несколько, то рассмотрите любое из них.

2 Укажите произведение двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 360, а разность равна 66.

3 Написано 10-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними числами, делится на 23 или 17. Последняя цифра равна 1. Найдите первую цифру.

4 Приведите пример трёхзначного числа, которое равно произведению пяти натуральных множителей, таких что любые два из них взаимно просты, а само число делится на 8.

5 Укажите сумму двух чисел, не делящихся друг на друга, наименьшее общее кратное которых равно 90, а их наибольший общий делитель равен 6.

6 Трёхзначное число А обладает следующими свойствами: вторая цифра равна произведению первой и третьей, при этом если поменять местами первую и последнюю цифры, то полученное число будет на 99 больше исходного. Приведите пример числа А.

7 Двузначное число не оканчивается нулём. Из него вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили квадрат натурального числа. Сколько таких чисел?

8 Приведите пример такого двузначного простого числа, обе цифры которого простые и разность между ними является простым числом.

9 Приведите пример двузначного числа, которое при делении на цифру его единиц даёт в частном 9 и в остатке 4.

10 Приведите пример двузначного числа, которое в два раза больше произведения своих цифр.

11 Представьте число 280 в виде произведения двух чисел с равной суммой цифр. В ответе укажите больший множитель. Если таких разложений на множители несколько, то рассмотрите любое из них.

12 При сложении двух натуральных чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль в конце числа и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определите первоначальные слагаемые. В ответе укажите большее из них.

13 Трёхзначное число начинается цифрой 4. Если эту цифру перенести в конец числа, то получится число, составляющее 0,75 исходного. Укажите исходное число.

14 Для любого натурального числа n обозначим n! = 1 • 2 • ... • n. При каком наименьшем n

число n! делится на 32?

15 Найдите четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число. 15

16 Квадрат числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найдите его. 16

17 Приведите пример трёхзначного числа, которое делится на 12, но не делится ни на 24, ни на 36, и при этом произведение всех цифр делится на 81. 17

18 Укажите натуральное число, которое в 7 раз больше цифры его единиц. 18

19 Укажите двузначное число, которое от перестановки его цифр увеличивается в 4,5 раза. 19

20 Укажите сумму двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 45, а разность квадратов равна 144. 20

21 Назовём автобусный билет счастливым, если сумма цифр его номера делится на 13. Приведите пример номера счастливого билета, для которого следующий билет тоже счастливый. 21

22 Найдите трёхзначное число, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число. 22

Ответы

1	47 или 56
2	2160 Пусть искомые числа x и y, тогда y=x+66. Ясно, что y>66. Число 360 делится и на x, и на y. Тогда, xm=360 и yn=360, где m и n натуральные числа, результат деления. Возможные значения числа y находятся среди делителей числа 360, которые большие, чем 66. Подходят только числа 72, 90, 120, 180 и 360. Соответствующие им значения числа x = 6, 24, 54, 114, 294. Из них числа 54, 114 и 294 не являются делителями числа 360. Следовательно, x может быть равен 6 или 24. Пара чисел 6 и 72 не удовлетворяет условиям задачи, так как их НОК равен 72, а вот пара 24 и 90 подходит. Их произведение 24x90=2160.
3	4
4	840 Чтобы число делилось на 8, множителем этого числа должно быть 8. Выберем произвольно еще 2 взаимно простых множителей, например 3 и 5. Проще всего в качестве последних двух множителей можно взять еще два простых числа: 7 и 1. В результате получаем: $8 \times 3 \times 5 \times 7 \times 1 = 840$ $\frac{840}{8} = 105$
5	48 Т.к. НОД равен 6, то эти числа имеют вид 6x и 6y, причем, x и y - взаимно просты и оба не равны 1 (исходные числа не делятся друг на друга). Тогда НОК(6x,6y)=6xy=90. Значит xy=15. Значит x=3, y=5, т.е. исходные числа равны 18 и 30, их сумма 48
6	122 или 263 Пусть а - число сотен исходного числа, б - число десятков, в - число десятков, тогда само исходное число равно A=100a+10б+c. Число на 99 больше: A+99=100c+10б+c. Подставляя в это выражение A: 100a+10б+c+99=100c+10б+a, получается 99a+99=99c, т.е. a+1=c. Кроме этого, условие говорит о том, что б=axc. Значит нам надо выбрать такие две идущие друг за другом цифры, чтобы их произведение было не больше 9. В этом случае нам подходят 1 и 2 или 2 и 3, потому что другие при перемножении дают двузначные числа. Тогда a=1, б=2, c=2 или a=2, б=6, c=3, этому ответствуют числа 122 и 263.
7	13 Пусть 10x+y такое двузначное число. Разность 10x+y-(10y+x)=9x-9y пусть будет равна a^2, т.е. $x - y = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ Подставляем поочередно вместо a числа от 1 до 10 и получаем три целочисленных разности $x - y = 1$ $x - y = 4$ $x - y = 9$ Последняя разность лишняя, потому что x и y это цифры, не являющиеся 0. В итоге получаем два условия $x = y + 1$ $x = y + 4$

	Подставляя в первое значения y от 1 до 8, получаем 8 возможных пар двузначных чисел, удовлетворяющих условию. Из второго условия возможно получить, только 5 пар чисел, так как x не превышает 9 и y может быть от 1 до 5. В итоге 8+5=13 таких чисел
8	29 Обе цифры числа простые, т.е. это могут быть только 2,3,5,7 (является ли 1 простым - неизвестно, так что его не трогаем). Значит это или 2, или нечётное число. Разность цифр тоже простое число. Разность двух нечётных чисел - чётная, а если чётная - это может быть только 2. Берём первое нечётное простое число 3, прибавляем 2, получается 5. Числа 35 и 53, 35 уже не простое остается 53. Берём следующее число 5. Прибавляем 2, получаем 7. Числа 57 и 75 не простые, так как 57 делится на 3, а 75 на 5. Следующее, 7. Прибавляем 2, получаем 9. Числа 79 и 97. 97 не подходит, так как делится на 3. Ещё есть вариант когда одно из чисел 2, а второе нечётное. Тогда разность будет нечётной. 2 и 1 - не подходит, т. к. разность 1. 2 и 3 - тоже не подходит 2 и 5 - подходит, разность 3 - простое. Числа 25 и 52, нам не подходят: 25 делится на 5, 52 на 2. 2 и 7 - подходит. Числа 27 и 72, тоже не подходит, 27 делится на 3, 72 на 2. 2 и 9 - подходит. Числа 29 и 92. 92 делится на 2, так что оно нам не подходит Все подходящие числа: 29, 53, 79
9	67
10	36
11	35 Разложим 280 на множители: [math][/math]$280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$ Произведения двух чисел: $280 = 1 \times 280 = 2 \times 140 = 4 \times 70 = 8 \times 35 = 40 \times 7 = 56 \times 5 = 10 \times 28 = 14 \times 20$ Из всех пар, подходит только 8 на 35, большее из них 35.
12	1941
13	432 Пусть a - число десятков исходного числа, b - число единиц, тогда само исходное число равно 400+10a+b, новое же число равно 100a+10b+4 или 0,75(400+10a+b). Составим и решим уравнение: 100a+10b+4=0,75(400+10a+b) 100a+10b+4=300+7,5a+0,75b 100a-7,5a+10b-0,75b=300-4 92,5a+9,25b=296 9,25(10a+b)=296 10a+b=296/9,25 10a+b=32 Таким образом, в исходном числе 3 десятка и 2 единицы, а само число равно 432.

14	8 32=2x2x2x2x2, тем самым n!=2x2x2x2x2xk=4x8xk, где k - это результат деления n! на 32. Используя условие, что n! = 1 • 2 • ... • n, получаем n!=1x2x3x4x5x6x7x8, т.е при n=8 число n! делится на 32, оно и будет наименьшим.
15	4860
16	3025
17	996 Если произведение всех цифр делится на 81, то две цифры из трех по 9. Получаем число 99x. Чтобы оно делилось на 24, число должно делиться и на 8, и на 3 одновременно. Признак деления на 3 без остатка состоит в том, что сумма цифр делится на 3. Нам подходит 993, 996, 999. Из них выбираем четное, так как наше число, помимо всего прочего, делится без остатка и на 8. Остается проверить все условия: $\frac{996}{12} = 83$ $\frac{996}{24} = 41,5$ $\frac{996}{36} = 27\frac{2}{3}$ $\frac{9 \times 9 \times 6}{81} = 6$ Варианты: 399, 699, 939, 969 не рассматривались, потому что среди них нет четных чисел.
18	35
19	18 Пусть искомое двузначное число будет $\overline{ab}$. Тогда из условия: $\frac{\overline{ba}}{\overline{ab}} = 4,5$ $\overline{ba} = 4,5 \times \overline{ab}$ $10b + a = 45a + 4,5b$ $5,5b = 44a$ $\frac{b}{a} = \frac{44}{5,5} = 8$ Из всех цифр, отношение которых равно 8, подходит пара 8 и 1. Значит искомое число 18
20	24
21	66999 Таких чисел полно 66999, 93999, 480999. Это задания явно не для базового уровня, но что поделать, будем решать. Можно подумать про принцип формирования таких чисел. 1) Пусть число не оканчивается на 9. Тогда изначально сумма его цифр была S, кратная 13. Затем она стала S+1, которая уже не кратна 13. Отсюда делаем вывод, что число должно обязательно оканчиваться на 9. 2) Теперь определим, на сколько же девяток должно оканчиваться это число. Разобьем число на две части: префикс и суффикс. Суффикс полностью состоит из девяток. Пусть суффикс длины n.Тогда сумма цифр в суффиксе равна 9n. Теперь пусть сумма цифр в префиксе равна S. (Разберем разбиение

на примере любого числа. Возьмем, например, 1234439999. Сумма префикса S=1+2+3+4+4+3=17, сумма суффикса равна 9*4=36.)

Тогда происходят такие вещи:

а) Сначала сумма цифр равна S + 9n. По условию, она кратна 13. Тогда S +9n = 13a, где a - некоторое целое и большее нуля число.

б) Теперь прибавляем к этому числу 1. После этого действия сумма в префиксе увеличивается на 1, а сумма в суффиксе становится равна 0, так как суффикс полностью состоит из девяток. Новое равенство: S+1 + 0xn = 13b, где b - некоторое целое и большее нуля число.

Имеем систему уравнений:

$$S+9n=13a$$
$$S+1=13b$$

Переменных больше, чем уравнений, значит, число решений бесконечно много. Из первого уравнения вычтем второе, получим:

$$9n-1=13(a-b)$$
$$n=\frac{13(a-b)+1}{9}=\frac{4(a-b)+1}{9}+(a-b)$$

Тогда можно подобрать такие пары чисел a и b, где a > b, что n будет целым числом. Пусть a - b = q, тогда $n=\dfrac{4q+1}{9}+q$, а 4q+1 должно быть кратно 9. Это значит, что 4q+1=9A, где A-целое.

4q=9A-1

$$q=\frac{9A-1}{4}=\frac{4\times 2A+A-1}{4}=2A+\frac{A-1}{4}$$

Отсюда видно, что A-1 должно быть кратно 4. Тогда A-1 = 4B, где B - некоторое целое число, больше или равное 0. Тогда A = 4B+1 - уже ограничений на делимость нет. Поэтому можно вернуться к переменным, введенным ранее.

$$q=\frac{9(4B+1)-1}{4}=9B+2$$
$$n=\frac{4q+1}{9}+2q=\frac{4(9B+2)+1}{9}+9B+2=13B+2$$
$$a=b+9B+2$$
$$S=13b-1$$

Теперь уже смело можно выбирать целые числа b и B, чтобы определить a. После определения a однозначно определятся n и S. Тогда уже, зная n и S, можно выписать множество чисел, обладающих свойствами, указанными в условии. Вот пример, если запутались:

Пусть b = 3, B = 1. Тогда:

$$a=1+9\times 1+2=12$$
$$S=13b-1=13\times 3-1=38$$
$$n=13B+3=13\times 1+3=16$$

При таких параметрах получится число, например, такое: 7878719999999999999999.

22	578
23	
24	

61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	

97	
98	
99	

Обо всех неточностях пишите на почту (с указанием темы и формулировки задания): dasha@neznaika.pro

Источник: http://neznaika.pro/test/math/b/131