

5.1) В классе 13 девочек и 10 мальчиков. Сколькими различными способами можно назначить двух дежурных (мальчик + девочка)?

В соответствии с правилом произведения  $13 \cdot 10 = 130$ .

Наглядное пояснение: представим таблицу в виде прямоугольника с 13 строками и 10 столбцами. В каждой ячейке таблицы будет записана одна возможная пара "мальчик + девочка". Всего ячеек в таблице получится  $13 \cdot 10 = 130$ .

5.2) В меню столовой предложены на выбор 3 первых блюда, 5 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?

В соответствии с правилом произведения  $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ .

Наглядное пояснение: представим 3-мерный массив в виде параллелепипеда с 3 строками, 5 столбцами и 4 слоями. В каждой ячейке массива будет зафиксирован один возможный вариант обеда. Всего ячеек в массиве получится  $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ .

5.3) В киоске продаётся 5 видов мороженого и 7 видов шоколадок. Сколькими разными способами можно выбрать 1 шоколадку и 1 мороженое?

В соответствии с правилом произведения  $5 \cdot 7 = 35$ .

5.4) Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырёх стульях в столовой детского сада?

Будем рассаживать детей последовательно, одного за другим. На 1-й стул 4 претендента, посадим одного из них. Тогда на 2-й стул останется 3 претендента. На 3-й - 2 и на 4-й - 1. В соответствии с правилом произведения  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

Для 10 класса. Здесь речь идёт о количестве перестановок из 4 элементов:

$$P(4) = 4! = 24$$

5.5) Сколько нечётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6 ? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

На последней позиции в записи числа может находиться только цифра 3. Поэтому количество чисел определится количеством вариантов, которыми можно разместить цифры 4, 8, 6 на двух оставшихся позициях. На 1-ю позицию имеем 3-х претендентов, на 2-ю - 2-х. В итоге получаем  $3 \cdot 2 = 6$ .

Для 10 класса. Здесь речь идёт о количестве размещений из 3 элементов по 2 (порядок следования элементов имеет значение):

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

5.6) Сколько нечётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6 ? (Цифры в записи числа могут повторяться).

Вариантов для каждой из 1-й и 2-й цифр получается 4. Для 3-й цифры в записи числа их только 2. В итоге получаем  $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ .

5.7) Сколько различных трёхзначных чисел, кратных пяти, можно составить из нечётных цифр, если цифры в числе не могут повторяться?

Очевидно, что в разряде единиц может быть только цифра 5. Тогда в разряде десятков может быть одна цифра из оставшихся 4-х, а в разряде сотен - одна цифра из оставшихся 3-х. В общей сложности получается  $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$  чисел.

5.8) Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 7, 2, 0, 3 ? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

В соответствии с правилом произведения  $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$  (на 1-й позиции в записи числа не может находиться 0).

5.9) Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?

В качестве первого овоща для салата возьмём какой-то один из шести, таких вариантов у нас 6. В качестве второго овоща возьмём какой-то следующий из оставшихся пяти, таких вариантов у нас 5. Третьим овощем будет какой-то из оставшихся четырёх, таких вариантов у нас 4. В соответствии с правилом произведения  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ .

Для 10 класса. Здесь речь идёт о количестве сочетаний из 6 элементов по 3 (порядок следования элементов не имеет значения):

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 120$$

5.10) Четыре подруги сыграли между собой по одной партии в шашки (1 партия = 1 игра). Сколько всего партий было сыграно?

Изобразим решение графически. Подруг изобразим точками, соответствующими вершинам квадрата (для наглядности), а сыгранные между ними партии изобразим линиями, их соединяющими. В итоге увидим 6 линий.

Второй способ решения, с помощью деревьев возможностей. Пронумеруем подруг 1, 2, 3, 4.

```
  1     2     3
  | |   | |   |
 2 3 4  3 4   4
```

Получаем 6 сыгранных партий.

Третий способ решения, для 10 класса. Здесь речь идёт о количестве сочетаний из 4 элементов по 2 (порядок следования элементов не имеет значения):

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$$

5.11) Чему равно наибольшее произведение двух различных двузначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 5 ? (Каждую цифру можно использовать только один раз.)

Очевидно, что в разрядах десятков должны быть большие числа. Рассмотрим произведения

$$51 \cdot 32 = 51 \cdot (31 + 1) = 51 \cdot 31 + 51$$

$$52 \cdot 31 = (51 + 1) \cdot 31 = 51 \cdot 31 + 31$$

$$51 \cdot 32 > 52 \cdot 31$$

$$51 \cdot 32 = 1632$$

## 6.1) Сколько трёхзначных чисел можно составить из нечётных цифр?

По умолчанию (если в условии задачи явным образом не указано иное) считается, что цифры в записи числа могут повторяться.

На каждом месте в записи числа может стоять любая из имеющихся нечётных цифр  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  - таких вариантов 5. В соответствии с правилом произведения получаем  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ .

Для 10 класса. Здесь речь идёт о размещениях с повторениями из 5 элементов по 3 (порядок следования элементов имеет значение, элементы могут повторяться):

$$\bar{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

## 6.2) Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 3, 7 ? (Цифры могут повторяться).

В соответствии с правилом произведения  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ .

Для 10 класса. Здесь речь идёт о количестве размещений с повторениями 3-х элементов по 4-м позициям:

$$\bar{A}_3^4 = 3^4 = 81$$

## 6.3) Сколько нечётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 ?

По умолчанию (если в условии задачи явным образом не указано иное) считается, что цифры в записи числа могут повторяться.

На первом месте в записи числа может стоять любая цифра, кроме 0 - 4 варианта. На втором и третьем местах - любая из этих пяти цифр. Так как число нечётное, на последнем месте могут быть только цифры 1 или 3 - два варианта. В соответствии с правилом умножения получаем, что нечётных четырёхзначных чисел можно составить  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 200$ .

**Правило суммы.** Если некоторый объект  $A$  может быть выбран из совокупности объектов  $m$  способами, а другой объект  $B$  может быть выбран  $n$  способами, то выбрать либо  $A$ , либо  $B$  можно  $m + n$  способами.

**Правило произведения.** Если объект  $A$  можно выбрать из совокупности объектов  $m$  способами и после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то пара объектов  $(A, B)$  в указанном порядке может быть выбрана  $m \cdot n$  способами.

**Сочетаниями** из  $n$  элементов по  $k$  называются кортежи длины  $k$ , составленные из  $n$ -элементного множества  $A$ ; при этом порядок следования элементов не имеет значения.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}$$

**Сочетаниями с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называются кортежи длины  $k$ , составленные из  $n$ -элементного множества  $A$ ; при этом порядок следования элементов не имеет значения и возможно повторение элементов.

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

**Размещениями** из  $n$  элементов по  $k$  называются кортежи длины  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), состоящие из различных элементов  $n$ -элементного множества  $A$ ; при этом порядок следования элементов важен.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (k \text{ сомножителей})$$

**Размещениями с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называются кортежи длины  $k$ , составленные из  $n$ -элементного множества; при этом порядок следования элементов важен и возможно повторение элементов.

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

**Перестановками** из  $n$  элементов называются кортежи длины  $n$ , составленные из  $n$ -элементного множества; при этом порядок следования элементов важен.

$$P_n = n!$$

(перестановки это частный случай размещений при  $k = n$ )

**Перестановкой с повторениями** состава  $\{n_1, \dots, n_k\}$  из элементов  $\{a_1, \dots, a_k\}$  называют любой кортеж длины  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , в который  $a_i$  входит  $n_i$  раз,  $i = \{1, 2, \dots, k\}$ .

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k$$