

1) Для задачи потребления

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 x_2}{(x_2 + 1)^4} \rightarrow \max$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$$

где (x_1, x_2) - набор из двух товаров,

U - функция полезности,

(p_1, p_2) - цены на соответствующие товары,

I - доход потребителя

найти функции спроса $x_1 = x_1(p_1, p_2, I)$ и $x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$ на первый и второй товар соответственно.

Решение задачи двухтоварного потребительского выбора (методом Лагранжа) приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases} \quad (*)$$

► Дифференцируем данную функцию полезности:

$$U'_{x_1} = \left(\frac{x_1^3 x_2}{(x_2 + 1)^4} \right)'_{x_1} = \frac{x_2}{(x_2 + 1)^4} \cdot 3x_1^2$$

$$U'_{x_2} = \left(\frac{x_1^3 x_2}{(x_2 + 1)^4} \right)'_{x_2} = x_1^3 \cdot \frac{(x_2 + 1)^4 - x_2 \cdot 4(x_2 + 1)^3}{(x_2 + 1)^8} = x_1^3 \cdot \frac{(x_2 + 1) - 4x_2}{(x_2 + 1)^5} = x_1^3 \cdot \frac{1 - 3x_2}{(x_2 + 1)^5}$$

Делаем подстановку найденных выражений для частных производных функции $U(x_1, x_2)$ в систему (*):

$$\begin{cases} \frac{\frac{x_2}{(x_2 + 1)^4} \cdot 3x_1^2}{x_1^3 \cdot \frac{(1 - 3x_2)}{(x_2 + 1)^5}} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x_2(x_2 + 1)}{x_1 \cdot (1 - 3x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

Из полученной системы выразим переменные $x_1 = x_1(p_1, p_2, I)$ и $x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$.

► Из 1-го уравнения системы получим

$$\frac{3(x_2 + 1)}{(1 - 3x_2)} = \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} \quad (**)$$

$$p_1 x_1 = \frac{3(x_2 + 1)}{(1 - 3x_2)} \cdot p_2 x_2$$

и сделаем подстановку во второе уравнение системы

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

$$\frac{3(x_2 + 1)}{(1 - 3x_2)} \cdot p_2 x_2 + p_2 x_2 = I$$

$$(3x_2 + 3) \cdot p_2 x_2 + (1 - 3x_2) \cdot p_2 x_2 = I \cdot (1 - 3x_2)$$

$$\cancel{3p_2 x_2^2} + 3p_2 x_2 + p_2 x_2 - \cancel{3p_2 x_2^2} = I - 3I \cdot x_2$$

$$4p_2 x_2 + 3I \cdot x_2 = I$$

$$x_2 \cdot (4p_2 + 3I) = I$$

$$x_2 = \frac{I}{4p_2 + 3I}$$

► Далее из (**) получаем

$$p_2 x_2 = \frac{(1 - 3x_2)}{3(x_2 + 1)} \cdot p_1 x_1 = \frac{\left(1 - \frac{3 \cdot I}{4p_2 + 3I}\right)}{3\left(\frac{I}{4p_2 + 3I} + 1\right)} \cdot p_1 x_1 = \frac{(4p_2 + 3I - 3I)}{3(I + 4p_2 + 3I)} \cdot p_1 x_1 = \frac{p_2}{3(p_2 + I)} \cdot p_1 x_1$$

и делаем подстановку во второе уравнение системы (*)

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

$$p_1 x_1 + \frac{p_2}{3(p_2 + I)} \cdot p_1 x_1 = I$$

$$p_1 x_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{3(p_2 + I)}\right) = I$$

$$x_1 = \frac{3I \cdot (p_2 + I)}{(4p_2 + 3I)p_1}$$

Ответ: $x_1 = \frac{3I \cdot (p_2 + I)}{(4p_2 + 3I)p_1}, \quad x_2 = \frac{I}{4p_2 + 3I}.$

Решение системы в Mathcad 14:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x_2 \cdot (x_2 + 1)}{x_1 \cdot (1 - 3x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{solve, } x_1, x_2 \\ \text{factor} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3 \cdot I \cdot (I + p_2)}{p_1 \cdot (3 \cdot I + 4 \cdot p_2)} \quad \frac{I}{3 \cdot I + 4 \cdot p_2} \end{array} \right]$$

Литература:

1) Красс М.С., Чупрынов Б.П. "Математика в экономике: математические методы и модели", 2007, стр. 407 (пример 11).

2) Найти объёмы x_1 и x_2 факторов производства, при использовании которых объём выпускаемой продукции максимален, а издержки зафиксированы на уровне $c = 10$ единиц, если производственная функция $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, цены единицы ресурсов производства $p_1 = 2$, $p_2 = 4$.

Данная задача сводится к максимизации функции

$$f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

при условии

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$$

$$2x_1 + 4x_2 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

(задача поиска условного экстремума функции $f(x_1, x_2)$; уравнение $x_1 + 2x_2 = 5$ называется уравнением связи)

Задачу на условный экстремум можно решить одним из следующих способов:

1. методом исключения части переменных;
2. методом неопределённых множителей Лагранжа;
3. методом геометрической интерпретации.

Для решения задачи используем метод исключения части переменных.

Используем уравнение связи $x_1 + 2x_2 = 5$ для замены, например, переменной x_1 . Поскольку

$$x_1 = 5 - 2x_2, \text{ то}$$

$$f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{5 - 2x_2} + \sqrt[3]{x_2}$$

т.е. получаем в результате функцию одной переменной $f(x_2) = \sqrt[3]{5 - 2x_2} + \sqrt[3]{x_2}$, и для ответа на вопрос задачи достаточно найти её экстремумы.

Находим стационарные точки функции из условия $f'(x_2) = 0$:

$$f'(x_2) = \left(\sqrt[3]{5 - 2x_2} + \sqrt[3]{x_2} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (5 - 2x_2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot x_2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x_2^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot (5 - 2x_2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} \cdot x_2^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot (5 - 2x_2)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$x_2^{-\frac{2}{3}} = 2 \cdot (5 - 2x_2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x_2 = 2^{\frac{3}{2}} \cdot (5 - 2x_2)$$

$$2^{\frac{3}{2}} \cdot x_2 = 5 - 2x_2$$

$$2\sqrt{2} \cdot x_2 + 2x_2 = 5$$

$$2x_2 \cdot (\sqrt{2} + 1) = 5$$

$$x_2 = \frac{5}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{5 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 1,036$$

Найдена одна стационарная точка. Первая производная функции меняет свой знак при переходе через точку

$x_2 = \frac{5 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2}$ с плюса на минус, поэтому это точка максимума.

Соответствующее значение x_1 находим из уравнения связи:

$$x_1 = 5 - 2x_2 = 5 - 2 \cdot \frac{5 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} = 5 - 5\sqrt{2} + 5 = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2,929$$

Ответ: $x_1 = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2,929$, $x_2 = \frac{5 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 1,036$.

Решение задачи в Mathematica 6:

```
Maximize[{ $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ ,  $x_1 + 2x_2 == 5$ }, { $x_1, x_2$ }] // Simplify
```

$$\left\{ -\text{Root}\left[25 + 60 \sqrt[3]{1}^3 + 4 \sqrt[3]{1}^6 \&, 1\right], \left\{ x_1 \rightarrow -5 \left(-2 + \sqrt{2}\right), x_2 \rightarrow \frac{5}{2} \left(-1 + \sqrt{2}\right) \right\} \right\}$$

Решение задачи в Mathcad 14:

$$\begin{aligned} x_1 &:= 1 & x_2 &:= 1 \\ f(x_1, x_2) &:= \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \\ \text{Given } x_1 + 2x_2 &= 5 & z &:= \text{Maximize}(f, x_1, x_2) \\ z &= \begin{pmatrix} 2.929 \\ 1.036 \end{pmatrix} & f(z_0, z_1) &= 2.442 \end{aligned}$$

Литература:

- 1) Кремер Н.Ш. "Высшая математика для экономических специальностей", 2006, стр. 516 (пример 9.114);
- 2) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 251.

3) Является ли корректной (продуктивной) модель Леонтьева, в которой матрица технологических коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} ?$$

Если да, то найти вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ валовых выпусков продукции, необходимый для удовлетворения

конечного потребления $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

► Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд $E + A + A^2 + \dots$

Достаточным условием сходимости ряда $E + A + A^2 + \dots$ является стремление к нулю элементов матрицы A^n при $n \rightarrow \infty$, что происходит при

$$\left[\begin{array}{l} \forall j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad \exists j \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 \\ \forall i \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad \exists i \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1 \end{array} \right.$$

По строкам:

$$0,6 + 0,2 = 0,8 < 1$$

$$0,3 + 0,4 = 0,7 < 1$$

По столбцам:

$$0,6 + 0,3 = 0,9 < 1$$

$$0,2 + 0,4 = 0,6 < 1$$

- выполнен достаточный признак продуктивности; следовательно, матрица A продуктивна (корректна).

► В соответствии с моделью Леонтьева, установившийся (сбалансированный) производственный процесс может быть описан формулой

$$X = AX + C$$

откуда находим решение относительно X :

$$X = (E - A)^{-1} \cdot C$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу $(E - A)^{-1}$ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 & 1 & 0 \\ -0,3 & 0,6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 15 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 9 & 15 & 20 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 9 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 9 & 15 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30/9 & 10/9 \\ 0 & 1 & 15/9 & 20/9 \end{pmatrix}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 30/9 & 10/9 \\ 15/9 & 20/9 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$X = A^{-1} \cdot C = \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 + 6 \\ 3 + 12 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 25/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,667 \\ 8,333 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 25/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,667 \\ 8,333 \end{pmatrix}$

Вычисление в Mathcad 14:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (E - A)^{-1} \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{25}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 \\ 8.333 \end{pmatrix}$$

Литература:

- 1) Кремер Н.Ш. "Высшая математика для экономических специальностей", 2006, стр. 98;
- 2) Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. "Математика для экономистов на базе Mathcad", 2003, стр. 64.