1) Проверить истинность данного равенства для множеств A, B и C:

$$\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap C$$

Возможны три способа решения задачи:

а) самый быстрый, лёгкий и очевидный - графический, с помощью диаграмм Эйлера-Венна (если проводить аналогию с языками программирования, это уровень метаязыка, управленческий уровень);

б) аналитический - элегантный и компактный, но более трудоёмкий (уровень макроязыка);

в) логический - наиболее трудоёмкий способ (уровень ассемблера).

Графическое решение задачи.

Изобразим графически левую и правую части равенства с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

...

Аналитическое решение задачи.

Преобразуем левую часть равенства:

$\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)=$ [по свойству дистрибутивности] =

$=\left(A\cup B\right)\cap C$

Следовательно, данное равенство является истинным.

Логическое решение задачи.

Доказательство тождества двух множеств основывается на определении равенства двух множеств: $A=B$, если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$. Берётся любой элемент x, принадлежащий левой части равенства, и показывается, что он входит в правую часть, а затем наоборот.

Пусть x принадлежит множеству, стоящему слева от знака равенства, т.е. $x\in\left(A\cup B\right)\cap C$. Тогда $x\in\left(A\cup B\right)$ и $x\in C$. Если $x\in A$, то $x\in A\cap C$, а значит $x\in\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$. Если $x\in B$, то имеем $x\in B\cap C$, а значит $x\in\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$. Итак, $\left(A\cup B\right)\cap C\subseteq\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$.

Пусть $x\in\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$. Если $x\in A\cap C$, то $x\in A$ и $x\in C$. Отсюда следует, что $x\in C$ и $x\in A\cup B$, т.е. $x\in\left(A\cup B\right)\cap C$. Если $x\in B\cap C$, то $x\in B$ и $x\in C$. Отсюда следует, что $x\in C$ и $x\in A\cup B$, т.е. $x\in\left(A\cup B\right)\cap C$.

Итак, $\left(A\cup B\right)\cap C=\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$.

Литература:

1) Меняйлов А.И. "Математический практикум", 2003, стр. 10 (задача 4).

2) Проверить истинность данного равенства для множеств A, B и C:

$$\left(A \setminus \bar{B}\right) \cup \left(A \setminus \bar{C}\right) = A \setminus \left(B \setminus C\right).$$

Определения.

Пересечением множества A с множеством B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые являются элементами и множества A, и множества B:

$$A \cup B \overset{Def}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Объединением множества A с множеством B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые содержатся или в A, или в B, или в $A \cap B$ (т.е. $A \cup B$ состоит из тех элементов, которые попали хотя бы в одно из множеств: в A или в B:

$$A \cap B \overset{Def}{=} \{x \mid x \in A \,\&\, x \in B\}.$$

Пусть Y - некоторое фиксированное множество ("универсум"), A - его подмножество. Тогда дополнением множества A до Y называется множество $\bar{A}$, состоящее из всех тех элементов универсума, которые не являются элементами множества A:

$$\bar{A} \overset{Def}{=} \{x \mid x \notin A\}.$$

Пусть A, B - некоторые множества. Тогда разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ или $A - B$, состоящее из всех тех элементов множества A, не входящих во множество B:

$$A \setminus B \overset{Def}{=} \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\}.$$

Симметрическая разность:

$$A \Delta B \overset{Def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \,\&\, x \notin B) \vee (x \notin A \,\&\, x \in B)\} \text{ или } A \Delta B \overset{Def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1-й способ решения - аналитический.

► Преобразуем левую часть равенства:

$L = \left(A \setminus \bar{B}\right) \cup \left(A \setminus \bar{C}\right) =$ [по определению разности] = $\quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$

$= \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right) =$ [по дистрибутивному закону] = $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

$= A \cap \left(B \cup C\right) =$ [по определению разности] = $\quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$

$= A \setminus \left(\overline{B \cup C}\right) =$ [принцип двойственности (теорема де Моргана)] = $\quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$= A \setminus \left(\bar{B} \cap \bar{C}\right) =$ [по определению разности] = $\quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$

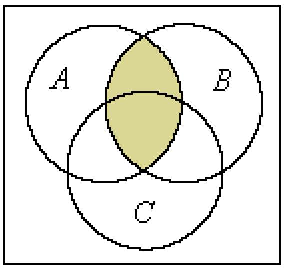
$= A \setminus \left(\bar{B} \setminus C\right)$

Сопоставляя полученный результат с правой частью исходного равенства, заметим, что $\bar{B} \setminus C \neq B \setminus C$, т.к. $\bar{B} \neq B$. Сужением множеств $\bar{B}$ и B (операция разности) невозможно сделать их равными.

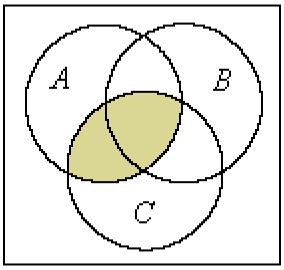
Следовательно, $\left(A \setminus \bar{B}\right) \cup \left(A \setminus \bar{C}\right) \neq A \setminus \left(B \setminus C\right)$.

2-й способ решения - графический.

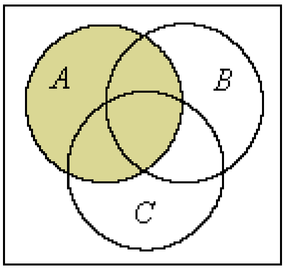
► Решаем задачу, используя диаграммы Эйлера-Венна.



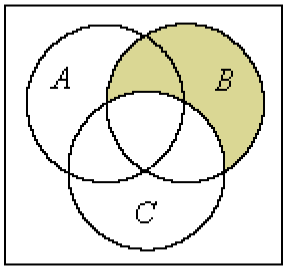
$A \setminus \overline{B}$



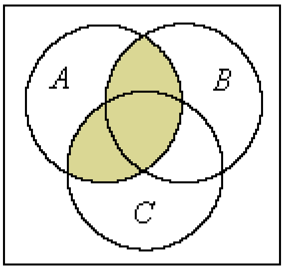
$A \setminus \overline{C}$



A

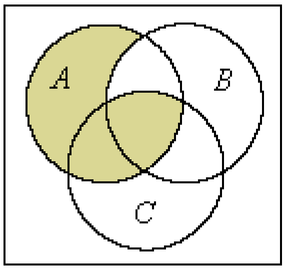


$B \setminus C$



$\left(A \setminus \overline{B}\right) \cup \left(A \setminus \overline{C}\right)$

$\neq$



$A \setminus \left(B \setminus C\right)$

Вывод: $\left(A \setminus \overline{B}\right) \cup \left(A \setminus \overline{C}\right) \neq A \setminus \left(B \setminus C\right)$.

Литература:

1) Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. "Лекции по алгебре", 2003, страницы 37...38;
2) Меняйлов А.И. "Математический практикум", 2003, страница 8 (свойства булевых операций над множествами);
3) Турецкий В.Я. "Математика и информатика", 2005, стр. 31...33 (алгебраические свойства операций над множествами);