

1) Орграф задан своей матрицей смежности

$$A(\bar{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следует:

- нарисовать орграф;
- найти полустепени и степени вершин;
- записать матрицу инцидентности.

a)

В матрице смежности строкам и столбцам соответствуют все вершины графа v_j , а элемент δ_{kl} , стоящий на пересечении k -й и l -й вершин (k -й строки и l -го столбца):

- в случае неорграфа (неориентированного графа) равен числу рёбер, соединяющих эти вершины;
- в случае орграфа (ориентированного графа) равен числу рёбер с началом в k -й вершине и концом в l -й.

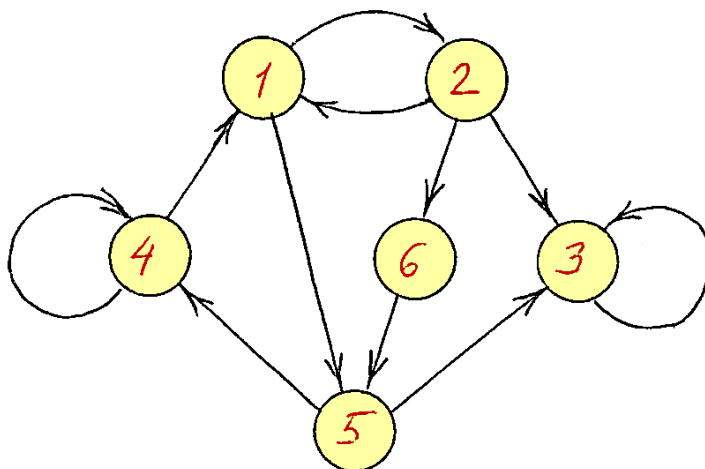
Заметим, что матрица смежности неорграфа является симметрической (не меняется при транспонировании). И обратно, если матрица смежности симметрична, то ей соответствует неорграф.

Черта над обозначением графа $\bar{G}$ означает, что граф ориентированный.

Матрица смежности рассматриваемого графа

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$					
v_2						
v_3						
v_4						
v_5						
v_6						

соответствует графическому представлению орграфа



б)

Локальная **степень** (или просто степень) $\deg(v)$ вершины - число рёбер, инцидентных вершине v .

В **неографе** сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер m графа, т.е. чётна. Петля даёт вклад, равный 2, в степень вершины.

Ребро в **орграфе** называется **дугой** (дуга - ориентированное ребро). Для вершин орграфа определяются две локальные степени:

- **полустепень захода** $\deg^{in}(v)$ или d^+ - число дуг, входящих в v ;
- **полустепень исхода** $\deg^{out}(v)$ или d^- - число дуг, выходящих из v .

Петля даёт вклад, равный 1, в обе эти степени. Сумма полустепеней вершины даёт степень вершины.

Полустепени и степени вершин орграфа:

вершина	d^+	d^-	d
v_1	2	2	4
v_2	1	3	4
v_3	3	1	4
v_4	2	2	4
v_5	2	2	4
v_6	1	1	2

(d^+ - полустепень захода, d^- - полустепень исхода, $d = d^+ + d^-$ - степень вершины)

Отметим, что суммы полустепеней орграфа совпадают и равны числу рёбер графа $m = 11$:

$$\sum_{v \in G} d_i^+ = \sum_{v \in G} d_i^- = \frac{1}{2} \cdot \sum_{v \in G} d_i = m = 11.$$

в)

В **матрице инцидентности** строкам соответствуют вершины v_i , а столбцам - рёбра e_j графа, а элемент ε_{ij} , находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца:

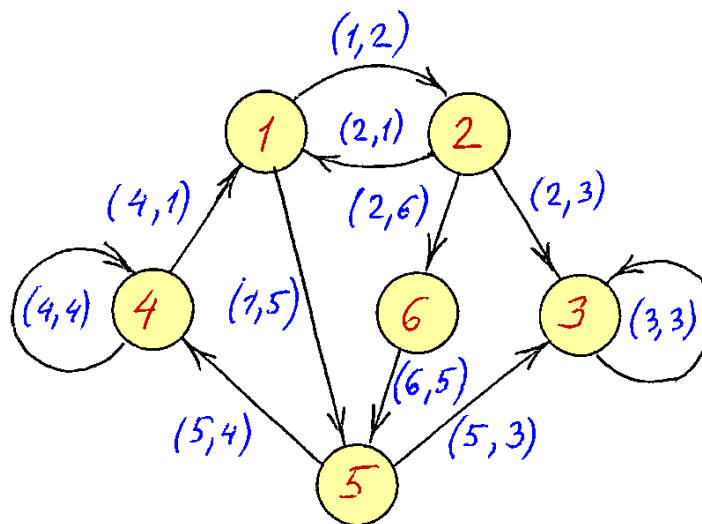
- в случае **неографа**:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{в противном случае (вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ не связаны)} \end{cases}$$

- в случае **орграфа**:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } v_i \text{ - начало ребра } e_j \\ 1, & \text{если вершина } v_i \text{ - конец ребра } e_j \\ 2, & \text{если } e_j \text{ - петля, а } v_i \text{ - инцидентная ей вершина} \\ 0, & \text{в остальных случаях (вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ не связаны)} \end{cases}$$

Обозначим дуги орграфа и составим таблицу инцидентности вершин и рёбер графа.



вершина \ дуга	(1,2)	(1,5)	(2,1)	(2,3)	(2,6)	(3,3)	(4,1)	(4,4)	(5,3)	(5,4)	(6,5)
v_1	-1	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
v_2	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	1	0
v_5	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1
v_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1

Итак, матрица инцидентности орграфа:

$$I(\bar{G}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Способы задания графа:

- графический;
- в виде двух множеств вершин V и рёбер E ;
- матрицей инцидентности;
- матрицей смежности;
- списком рёбер графа.

Литература:

- 1) Москинова Г.И. "Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях", 2004, стр. 201 (матрица инцидентности, матрица смежности);
- 2) Кирсанов М.Н. "Графы в Maple", 2007.