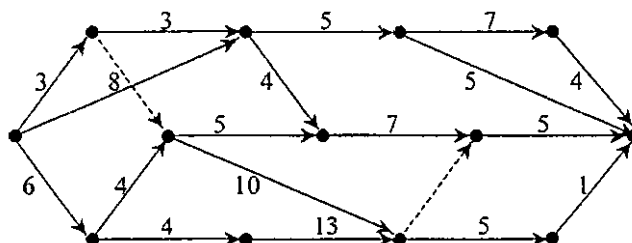


1) Дан сетевой график; требуется:

- а) ввести обозначения вершин и рёбер;
- б) построить дерево путей сетевого графика и найти по нему критический путь;
- в) найти критический путь и резервы времени.



Пунктирными линиями на графике изображены фиктивные работы. Здесь они нужны для синхронизации работ (затраты времени и ресурсов на них равны 0). В других случаях фиктивные работы могут отражать отсрочки времени и ожидания (тогда при нулевых затратах ресурсов затраты времени ненулевые).

Вершинами данного оргграфа являются события; рёбрам соответствуют работы.

а)

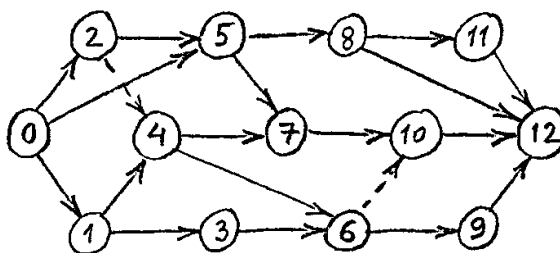
Нумерацию событий для сетевого графика производим в определённом порядке, чтобы в любом пути графа нумерация вершин шла по возрастанию.

Для правильной нумерации событий нумерацию начинают с исходного события, которому даётся номер 0. Из исходного события 0 вычёркивают все следующие за ним работы, на оставшейся сети находят событие, которому не предшествует ни одна работа. Это событие получает номер 1. Затем вычёркивают события, следующие за событием 1, и на оставшейся части сети вновь находят событие, которому не предшествует ни одна работа, ему присваивают номер 2, и так продолжается до завершающего события.

Фиктивные работы участвуют в процессе равноправно.

Обозначения вершин:

- 1-й слой содержит вершину 0;
- 2-й слой содержит вершины 1, 2;
- 3-й слой содержит вершины 3, 4, 5;
- 4-й слой содержит вершины 6, 7, 8;
- 5-й слой содержит вершины 9, 10, 11;
- 6-й слой содержит вершину 12.



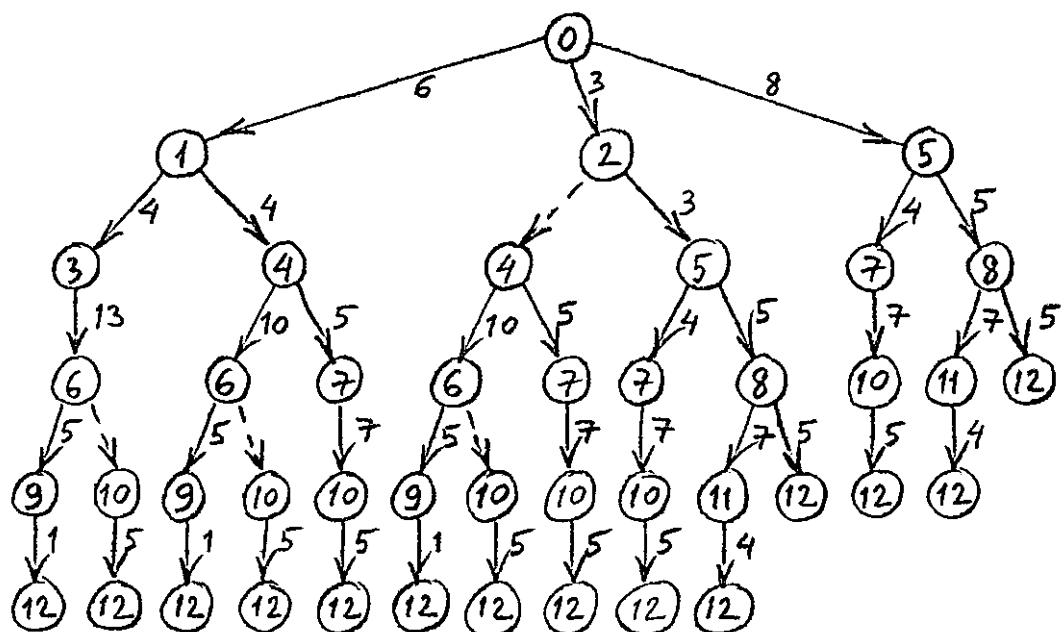
Вводить обозначения для рёбер графа излишне, т.к. любой путь можно определить через упорядоченную последовательность вершин, а любую работу можно определить парой вершин. Лучше у каждого ребра будем отмечать его вес.

б)

При небольшом числе работ критические пути могут быть найдены перебором возможных путей сетевого графика. Но рассмотрим более интеллектуальные способы.

► 1-й способ вычисления критического пути ("графический")

Совокупность возможных путей сетевого графика (всего их 14) соответствует дереву путей сетевого графика.



29 28 26 25 27 19 18 20 22 22 16 24 24 18

- общее время выполнения работ.

Критическим (наибольшим) является путь, длительность которого равна 29, содержащий работы (0,1) , (1,3) , (3,6) , (6,9) , (9,12).

► 2-й способ вычисления критического пути ("табличный")

Вычислим и сведём в таблицу временные параметры сетевого графика.

Номер события	Сроки совершения события		Резерв времени
	ранний	поздний	
0	0	0	0
1	6	6	0
2	3	9	6
3	10	10	0
4	10	13	3
5	8	12	4
6	23	23	0
7	15	18	3
8	13	17	4
9	28	28	0
10	23	25	2
11	20	24	4
12	29	29	0

Ранние сроки для событий:

- 0) 0 ,
- 1) 6 ,
- 2) 3 ,
- 3) $6 + 4 = 10$,
- 4) $\max \{3 + 0 ; 6 + 4\} = \max \{3 ; 10\} = 10$,
- 5) $\max \{8 ; 3 + 3\} = \max \{8 ; 6\} = 8$,
- 6) $\max \{10 + 13 ; 10 + 10\} = \max \{23 ; 20\} = 23$,
- 7) $\max \{10 + 5 ; 8 + 4\} = \max \{15 ; 12\} = 15$,
- 8) $8 + 5 = 13$,

- 9) $23 + 5 = 28$,
 10) $\max \{23 + 0 ; 15 + 7\} = \max \{23 ; 22\} = 23$,
 11) $13 + 7 = 20$,
 12) $\max \{13 + 5 ; 28 + 1 ; 23 + 5 ; 20 + 4\} = \max \{18 ; 29 ; 28 ; 24\} = 29$.

Поздние сроки для событий:

- 12) 29 (этот срок равен раннему сроку завершающего события),
 11) $29 - 5 = 24$,
 10) $29 - 4 = 25$,
 9) $29 - 1 = 28$,
 8) $\min \{24 - 7 ; 29 - 5\} = \min \{17 ; 24\} = 17$,
 7) $25 - 7 = 18$,
 6) $\min \{28 - 5 ; 25 - 0\} = \min \{23 ; 25\} = 23$,
 5) $\min \{18 - 4 ; 17 - 5\} = \min \{14 ; 12\} = 12$,
 4) $\min \{23 - 10 ; 18 - 5\} = \min \{13 ; 13\} = 13$,
 3) $23 - 13 = 10$,
 2) $\min \{13 - 0 ; 12 - 3\} = \min \{13 ; 9\} = 9$,
 1) $\min \{10 - 4 ; 13 - 4\} = \min \{6 ; 9\} = 6$,
 0) $\min \{28 - 5 ; 25 - 0\} = \min \{23 ; 25\} = 23$.

Резерв времени, например, для события 2 равный 6 означает, что время свершения события 2 может быть задержано на 6 единиц времени без увеличения общего срока выполнения проекта. События, не имеющие резерва времени, образуют критический путь, содержащий работы (0,1) , (1,3) , (3,6) , (6,9) , (9,12). Его длительность равна 29.

в)

Вычислим резервы времени для работ.

Различают четыре резерва времени:

полный резерв,
 свободный резерв,
 независимый резерв,
 гарантийный резерв.

Полный резерв времени - это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить продолжительность без изменения общего срока проекта.

Свободный резерв времени - максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы, при условии, что все события наступают в ранние сроки.

Независимый резерв времени означает запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ним работ.

Гарантийный резерв означает для исполнителя работы резерв времени, который он имеет, когда исполнители предшествующих работ заканчивают их в неудобные для него поздние допустимые сроки, но и он сдаёт свою работу в поздний срок.

Обычно ограничиваются расчётом полного и свободного резервов.

Работа	Продолжительность	Сроки совершения события				Полный резерв	Свободный резерв
		раннее начало	раннее окончание	позднее начало	позднее окончание		
(0, 1)	6	0	$0+6=6$	$6-6=0$	6	$0-0=0$ (к)	$6-0-6=0$
(0, 2)	3	0	$0+3=3$	$9-3=6$	9	$6-0=6$	$3-0-3=0$
(0, 5)	8	0	$0+8=8$	$12-8=4$	12	$4-0=4$	$8-0-8=0$
(1, 3)	4	6	$6+4=10$	$10-4=6$	10	$6-6=0$ (к)	$10-6-4=0$
(1, 4)	4	6	$6+4=10$	$13-4=9$	13	$9-6=3$	$10-6-4=0$
(2, 4)	0	3	$3+0=3$	$13-0=13$	13	$13-3=10$	$10-3-0=7$
(2, 5)	3	3	$3+3=6$	$12-3=9$	12	$9-3=6$	$8-3-3=2$

(3, 6)	13	10	$10+13=23$	$23-13=10$	23	$10-10=0$ (к)	$23-10-13=0$
(4, 6)	10	10	$10+10=20$	$23-10=13$	23	$13-10=3$	$23-10-10=3$
(4, 7)	5	10	$10+5=15$	$18-5=13$	18	$13-10=3$	$15-10-5=0$
(5, 7)	4	8	$8+4=12$	$18-4=14$	18	$14-8=6$	$15-8-4=3$
(5, 8)	5	8	$8+5=13$	$17-5=12$	17	$12-8=4$	$13-8-5=0$
(6, 9)	5	23	$23+5=28$	$28-5=23$	28	$23-23=0$ (к)	$28-23-5=0$
(6, 10)	0	23	$23+0=23$	$25-0=25$	25	$25-23=2$	$23-23-0=0$
(7, 10)	7	15	$15+7=22$	$25-7=18$	25	$18-15=3$	$23-15-7=1$
(8, 11)	7	13	$13+7=20$	$24-7=17$	24	$17-13=4$	$20-13-7=0$
(8, 12)	5	13	$13+5=18$	$29-5=24$	29	$24-13=11$	$29-13-5=11$
(9, 12)	1	28	$28+1=29$	$29-1=28$	29	$28-28=0$ (к)	$29-28-1=0$
(10, 12)	5	23	$23+5=28$	$29-5=24$	29	$24-23=1$	$29-23-5=1$
(11, 12)	4	20	$20+4=24$	$29-4=25$	29	$25-20=5$	$29-20-4=5$

Для заполнения колонки "раннее начало" и "позднее окончание" используем результаты вычислений предыдущей таблицы - раннее начало работы соответствует раннему сроку события, с которого она начинается; позднее окончание работы соответствует позднему сроку события, которым она завершается.

Сроки раннего окончания работ вычисляются как сумма сроков раннего начала работ с продолжительностью соответствующих работ.

Сроки позднего начала работ вычисляются как разность сроков позднего окончания работ и продолжительности соответствующих работ.

Полный резерв времени работы вычисляем как разность сроков позднего начала работ и раннего срока события, с которого она начинается.

Например, полный резерв времени для работы (0, 2) равен 6 единицам времени, т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на 6, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Свободный резерв времени работы вычисляем как разность раннего срока события, которым она завершается, раннего срока события, с которого она начинается, и продолжительности работы.

Например, свободный резерв времени для работы (5, 7) равен 3 единицам времени, т.е. начало данной работы можно отсрочить на 3 или можно увеличить продолжительность данной работы на 3, при сохранении общего срока выполнения проекта; но без затрат резерва времени предшествующих ей работ.

Литература:

- 1) Красс М.С., Чупрынов Б.П. "Математика в экономике: математические методы и модели", 2007, стр. 117 (сетевые графики);
- 2) Кремер Н.Ш. "Исследование операций в экономике", 2006, стр. 294;
- 3) Шапкин А.С., Мазаева Н.П. "Математические методы и модели исследования операций", 2007, стр. 254.