1) Найти минимальный остов, кратчайший путь из вершины 1 в вершину 13 и какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа (см. рис.), если веса его рёбер распределены следующим образом:

$c(1,2)=1,5 \quad c(1,4)=1 \quad c(1,5)=0,9 \quad c(1,3)=2$

$c(2,3)=2,1 \quad c(2,5)=3 \quad c(2,7)=1,7$

$c(3,4)=3 \quad c(3,5)=0,1 \quad c(3,6)=4,5$

$c(4,5)=5 \quad c(4,7)=5,7 \quad c(4,9)=7,3$

$c(5,6)=3,2 \quad c(5,7)=1,8 \quad c(5,8)=9 \quad c(5,9)=2$

$c(6,9)=4$

$c(7,8)=4,2 \quad c(7,10)=6 \quad c(7,11)=6,7$

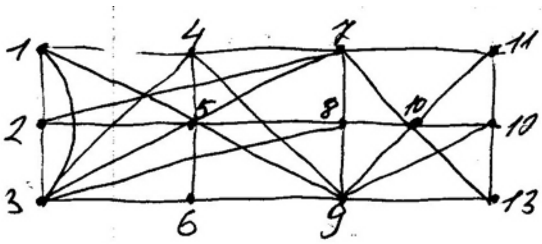
$c(8,9)=3 \quad c(8,10)=4$

$c(9,10)=6,5 \quad c(9,13)=3,7$

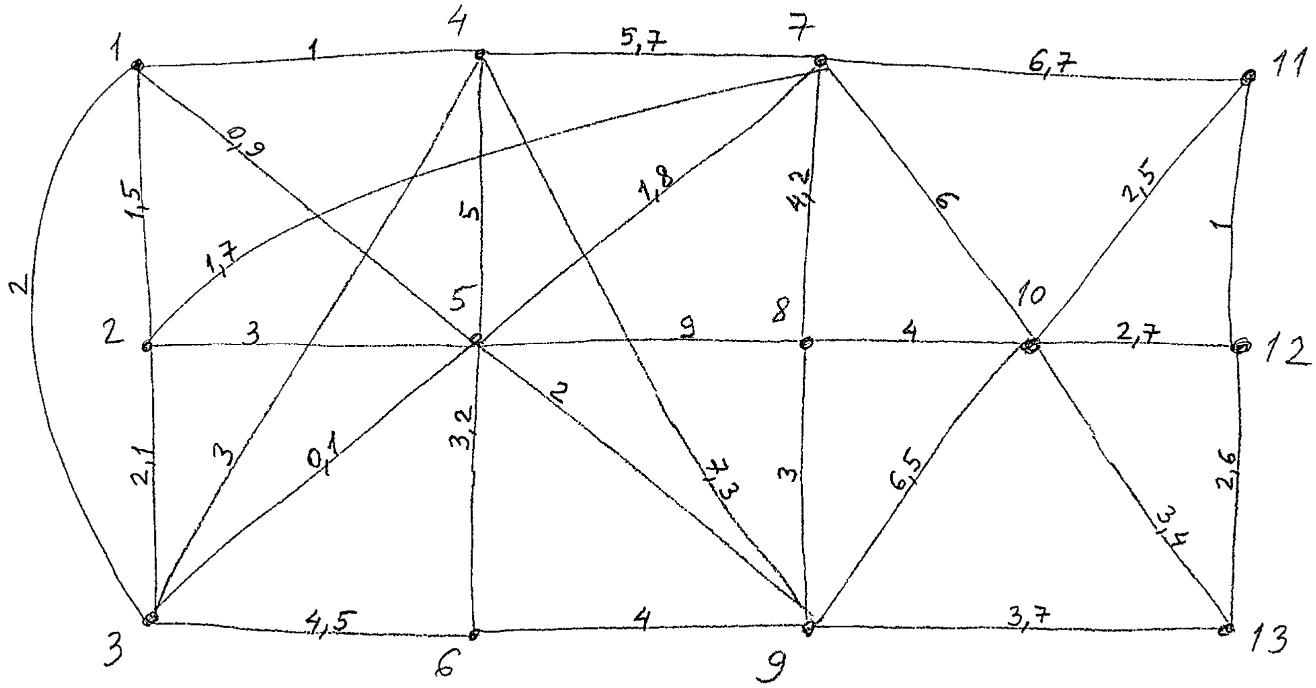
$c(10,11)=2,5 \quad c(10,12)=2,7 \quad c(10,13)=3,4$

$c(11,12)=1$

$c(12,13)=2,6$




Не указаны веса рёбер $c(3,8)$ и $c(9,12)$. Поскольку эти рёбра не определены, считаем их отсутствующими (их вес $\infty$).



Информацию о весах рёбер сведём в симметрическую матрицу весов (т.к. неограф; для орграфа матрица несимметрическая):

$$W=\begin{pmatrix}
0 & 1{,}5 & 2 & 1 & 0{,}9 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1{,}5 & 0 & 2{,}1 & \infty & 3 & \infty & 1{,}7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & 2{,}1 & 0 & 3 & 0{,}1 & 4{,}5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & \infty & 3 & 0 & 5 & \infty & 5{,}7 & \infty & 7{,}3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
0{,}9 & 3 & 0{,}1 & 5 & 0 & 3{,}2 & 1{,}8 & 9 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 4{,}5 & \infty & 3{,}2 & 0 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 1{,}7 & \infty & 5{,}7 & 1{,}8 & \infty & 0 & 4{,}2 & \infty & 6 & 6{,}7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & 4{,}2 & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 7{,}3 & 2 & 4 & \infty & 3 & 0 & 6{,}5 & \infty & \infty & 3{,}7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 4 & 6{,}5 & 0 & 2{,}5 & 2{,}7 & 3{,}4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6{,}7 & \infty & \infty & 2{,}5 & 0 & 1 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2{,}7 & 1 & 0 & 2{,}6 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3{,}7 & 3{,}4 & \infty & 2{,}6 & 0
\end{pmatrix}$$

Далее матрица $W$ будет необходима при нахождении кратчайшего пути от вершины 1 к вершине 13.

► Находим минимальный остов графа (остов минимального веса).

Алгоритм, решающий задачу нахождения остова минимального веса во взвешенном графе $G=(M;R)$, заключается в следующем.

1. Строим граф $T_1$, состоящий из множества вершин $M$ и единственного ребра $u_1$, которое имеет минимальный вес.

2. Если граф $T_i$ уже построен и $i<n-c$, где $n=|M|$ (мощность множества вершин, равна числу вершин), $c=c(G)$ (число компонент связности графа $G$, в данном случае $c=1$), то строим граф $T_{i+1}$, добавляя к множеству рёбер графа $T_i$ ребро $u_{i+1}$, имеющее минимальный вес среди рёбер, не входящих в $T_i$ и не составляющих циклов с рёбрами из $T_i$.

$n$ - число вершин;
$c$ - число компонент связности графа $G$.

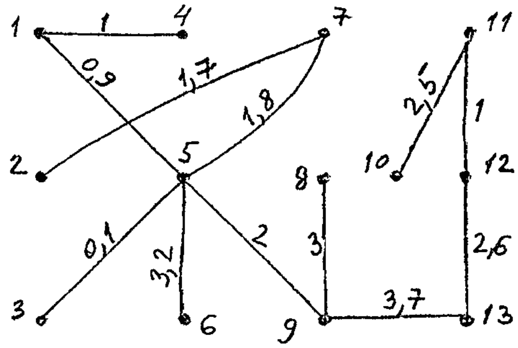
1) Строим граф, состоящий из ребра $(3,5)$ и весом $c(3,5)=0{,}1$;

2) добавляем ребро $(5,1)$ с весом $c(1,5)=0{,}9$;

3) добавляем ребро $(1,4)$ с весом $c(1,4)=1$ и т.д.; процесс построения остова показан в таблице:

| № | добавляем ребро | вес ребра | условие окончания |
|---|---|---|---|
| 1 | $(3,5)$ | $c(3,5)=0,1$ | $1<13-1=12$ |
| 2 | $(5,1)$ | $c(1,5)=0,9$ | $2<12$ |
| 3 | $(1,4)$ | $c(1,4)=1$ | $3<12$ |
| 4 | $(5,7)$ | $c(5,7)=1,8$ | $4<12$ |
| 5 | $(7,2)$ | $c(2,7)=1,7$ | $5<12$ |
| 6 | $(5,9)$ | $c(5,9)=2$ | $6<12$ |
| 7 | $(9,8)$ | $c(8,9)=3$ | $7<12$ |
| 8 | $(5,6)$ | $c(5,6)=3,2$ | $8<12$ |
| 9 | $(9,13)$ | $c(9,13)=3,7$ | $9<12$ |
| 10 | $(13,12)$ | $c(12,13)=2,6$ | $10<12$ |
| 11 | $(12,1)$ | $c(11,12)=1$ | $11<12$ |
| 12 | $(11,10)$ | $c(10,11)=2,5$ | $12=12$, the end |
| | | $\sum c_i=23,5$ | |

Остов минимального веса ( $\sum c_i=23,5$ ):




► Находим кратчайший путь (взвешенное расстояние) из вершины 1 в вершину 13.

Для нахождения кратчайших маршрутов используются алгоритмы:

- алгоритм Форда-Беллмана (требуется порядка $n^3$ операций);

- алгоритм Дейкстры (требуется порядка $n^2$ операций) - более эффективный, чем алгоритм Форда-Беллмана, но используется только для взвешенных графов, в которых веса всех дуг неотрицательны.

Применим алгоритм Дейкстры [см. 3].

1. Источник - вершина 1.

$T_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ - множество вершин за исключением 1-й вершины;

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 2 & 1 & \underline{0,9} & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

- веса (расстояния) от вершины-источника до остальных вершин графа, достигаемых первым шагом алгоритма (1-я строка матрицы $W$).

Подчёркнём наименьший вес первого шага, исключая из рассмотрения вершину 1 (при условии, что соответствующая (5-я) вершина имеется в $T_1$).

Исключением этой вершины из множества $T_1$ образуется множество $T_2$.

2. $T_2 = \{2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$$D^{(2)} = \left( 0 \quad 3{,}9 \quad \underline{1} \quad 5{,}9 \quad 0{,}9 \quad 4{,}1 \quad 2{,}7 \quad 9{,}9 \quad 2{,}9 \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 0,9 с весами 5-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1 и 5 перекочёвывают из предыдущего шага (нет смысла делать путь обратно на вершину 1 и нет смысла останавливать движение на вершине 5).

Подчёркнём наименьший вес второго шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины 1 и 5 (при условии, что соответствующая (3-я) вершина имеется в $T_2$ ).

3. $T_3 = \{2,4,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$$D^{(3)} = \left( 0 \quad \underline{3{,}1} \quad 1 \quad 4 \quad 0{,}9 \quad 5{,}5 \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 1 с весами 3-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1, 5 и 3 перекочёвывают из предыдущего шага.

Подчёркнём наименьший вес третьего шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины 1, 5 и 3 (при условии, что соответствующая (2-я) вершина имеется в $T_3$ ).

4. $T_4 = \{4,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$$D^{(4)} = \left( 0 \quad 3{,}1 \quad 1 \quad \infty \quad 0{,}9 \quad \infty \quad \underline{4{,}8} \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 3,1 с весами 2-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1, 5, 3 и 2 перекочёвывают из предыдущего шага.

Подчёркнём наименьший вес четвёртого шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины 1, 5, 3 и 2 (при условии, что соответствующая (7-я) вершина имеется в $T_4$ ).

5. $T_5 = \{4,6,8,9,10,11,12,13\}$

$$D^{(5)} = \left( 0 \quad 3{,}1 \quad 1 \quad 10{,}5 \quad 0{,}9 \quad \infty \quad 4{,}8 \quad \underline{9} \quad \infty \quad 10{,}8 \quad 11{,}5 \quad \infty \quad \infty \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 1,7 с весами 7-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1, 5, 3, 2 и 7 перекочёвывают из предыдущего шага.

Подчёркнём наименьший вес пятого шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины (при условии, что соответствующая (8-я) вершина имеется в $T_5$ ).

6. $T_6 = \{4,6,9,10,11,12,13\}$

$$D^{(6)} = \left( 0 \quad 3{,}1 \quad 1 \quad \infty \quad 0{,}9 \quad \infty \quad 4{,}8 \quad 9 \quad \underline{12} \quad 13 \quad \infty \quad \infty \quad \infty \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 5,9 с весами 8-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1, 5, 3, 2 , 7 и 8 перекочёвывают из предыдущего шага.

Подчёркнём наименьший вес шестого шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины (при условии, что соответствующая (9-я) вершина имеется в $T_6$ ).

7. $T_7 = \{4,6,10,11,12,13\}$

$$D^{(7)} = \left( 0 \quad 3{,}1 \quad 1 \quad 19{,}3 \quad 0{,}9 \quad 16 \quad 4{,}8 \quad 9 \quad 12 \quad 18{,}5 \quad \infty \quad \infty \quad \underline{15{,}7} \right)$$

- сумма найденного на предыдущем шаге минимального веса (расстояния) 8,9 с весами 9-й вершины. Веса, соответствующие вершинам 1, 5, 3, 2 , 7, 8 и 9 перекочёвывают из предыдущего шага.

Подчёркнём наименьший вес седьмого шага, исключая из рассмотрения пройденные ранее вершины (при условии, что соответствующая (13-я) вершина имеется в $T_7$ ).

Как видим, достигнута вершина 13 - алгоритм завершён.

Взвешенным расстоянием ( $w$-расстоянием) $\rho_w(a,b)$ между вершинами $a$ и $b$ называется минимальный из весов $(a,b)$-маршрутов.

$(a,b)$-маршрут, вес которого равен $w$-расстоянию $\rho_w(a,b)$, называется кратчайшим $(a,b)$-маршрутом во взвешенном графе $G$ .

Выпишем найденные по ходу алгоритма кратчайшие расстояния от вершины-источника 1 до других вершин:

$\rho_w(1,1)=0$

$\rho_w(1,5)=0,9$

$\rho_w(1,3)=1$

$\rho_w(1,2)=3,1$

$\rho_w(1,7)=4,8$

$\rho_w(1,8)=9$

$\rho_w(1,9)=12$

$\rho_w(1,13)=15,7$

Итак, кратчайший путь (кратчайший маршрут) из вершины 1 в вершину 13:

$(1, 5, 3, 2, 7, 8, 9, 13)$,

а минимальное расстояние между вершинами графа 1 и 13 равно $15,7$.

► Найдём какое-нибудь максимальное паросочетание данного графа.

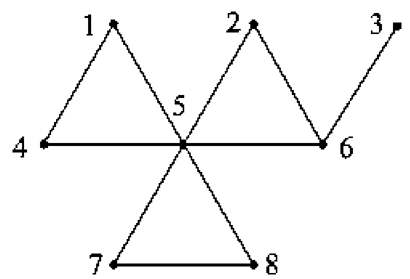
Произвольное подмножество попарно несмежных рёбер графа называется паросочетанием:

$F \subset E(G) \mid \forall e_1, e_2 \in F$ ; $e_1, e_2$ - несмежны.

Паросочетание называется максимальным, если оно не содержится в паросочетании с большим числом рёбер, и наибольшим, если число рёбер в нём наибольшее среди всех паросочетаний графа.

Число рёбер в наибольшем паросочетании графа $G$ называется числом паросочетания и обозначается через $\alpha_1(G)$. Частный случай паросочетаний - паросочетания в двудольных графах. Существуют специальные алгоритмы формального получения максимального паросочетания графа.

Пример из [1]:

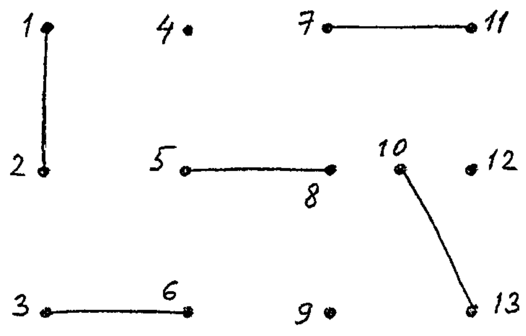



- здесь $\{(1,4),(7,8),(5,6)\}$ - максимальное паросочетание;

$\{(1,4),(7,8),(2,5),(3,6)\}$ - наибольшее паросочетание.

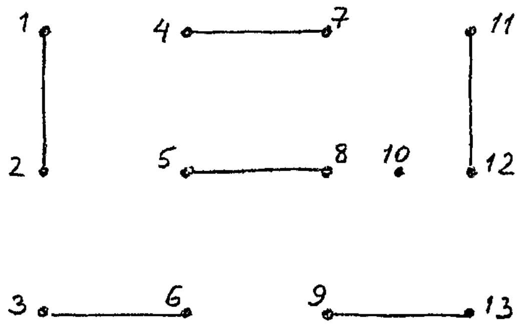
В исследуемом графе можно указать, например, максимальное паросочетание:

$\{(1,2),(3,6),(5,8),(7,11),(10,13)\}$



А следующее максимальное паросочетание является наибольшим паросочетанием:

$\{(1,2),(3,6),(5,8),(4,7),(9,13),(11,12)\}$





*Литература:*

1) Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. "Дискретная математика", 2007, стр. 124 (алгоритм Форда-Беллмана, алгоритм Дейкстры), стр. 134 (алгоритм нахождения остова минимального веса);

2) Васильева А.Ю. "Лекции по дискретной математике", 2005, стр. 29 (паросочетание), http://MFH.gorodok.net;

3) Красс М.С., Чупрынов Б.П. “Математика в экономике: математические методы и модели”, 2007, стр. 113 (задача нахождения кратчайшего пути);

4) Новиков Ф.А. "Дискретная математика для программистов", 2008, стр. 284 (алгоритмы Флойда, Дейкстры);

5) Куликов А. "Лекция 15. Максимальное паросочетание", 2005 (алгоритм поиска), http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub.