

1) Для графа, заданного своей матрицей инцидентий

$$\begin{array}{c}
 e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \\
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

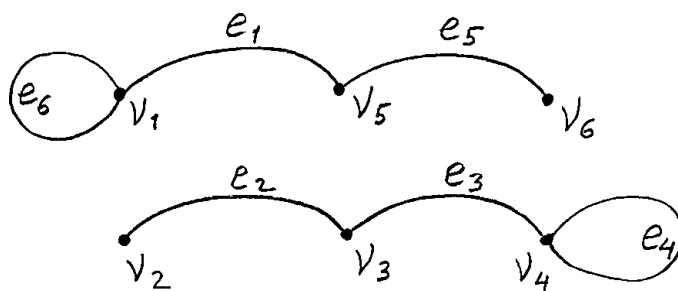
требуется:

- 1) построить граф;
- 2) найти степень каждой из его вершин;
- 3) записать матрицу смежности графа.

1)

По строкам отражены вершины графа v_j , по столбцам отражены рёбра графа e_i . В матрице не дифференцированы начала и концы рёбер, поэтому имеем дело с неориентированным графом (неографом).

Если в матрице указана 1, то вершина v_j - конец ребра e_i (в случае неориентированного графа ребро e_i инцидентно вершине v_j). Если в матрице указана -1, то вершина v_j - начало ребра e_i . Если в матрице указана 2, то e_i - петля, а v_j - инцидентная ей вершина. Если в матрице указан 0, то вершина v_j и ребро e_i не связаны.



2)

Степень вершины v_j обозначается $\rho(v_j)$ или $\rho(j)$ или $\deg(v_j)$.

Принято считать вклад петли в случае неориентированного графа равным 2 (хотя, с оговоркой, возможно считать этот вклад равным 1). Для ориентированного графа петля вносит вклад 1 в степень выходящих рёбер, и 1 в степень входящих рёбер.

В данном случае:

$$\rho(1) = 3, \quad \rho(4) = 3,$$

$$\rho(2) = 1, \quad \rho(5) = 2,$$

$$\rho(3) = 2, \quad \rho(6) = 1.$$

(считаем, что вклад петли равен 2)

Теорема. Сумма степеней всех вершин графа есть число, равное удвоенному числу рёбер.

В данном графе количество рёбер 6, сумма степеней вершин равна $3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 12$.

3)

В матрице смежности по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины v_j , а на пересечении k -й и l -й вершин в случае неориентированного графа проставляется число, равное числу рёбер, соединяющих эти вершины.

Матрица смежности рассматриваемого графа:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \\
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

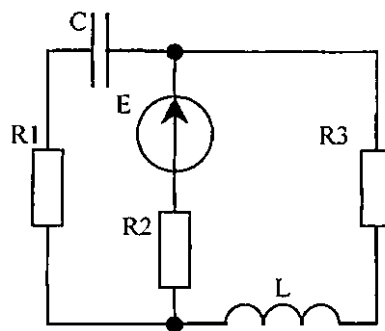
Дополнение. Матрица смежности неграфа (неориентированного графа) является симметрической и не меняется при транспонировании. Матрица смежности орграфа (ориентированного графа) - несимметрическая.

Литература:

- 1) Москинова Г.И. "Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях", 2004, стр. 201 (матрица инцидентности, матрица смежности);
- 2) Новиков Ф.А. "Дискретная математика для программистов", 2008, стр. 240 (графы);
- 3) Красс М.С., Чупрынов Б.П. "Математика в экономике: математические методы и модели", 2007, стр. 98 (графы).

2) Для схемы электрической цепи требуется:

- 1) построить граф цепи;
- 2) построить какой-либо остов и соответствующий коостов графа;
- 3) записать базисные матрицы циклов и разрезов по выбранному остову; проверить ортогональность векторов циклов к векторам разрезов;
- 4) записать соотношения между токами и соотношения между напряжениями на элементах цепи.

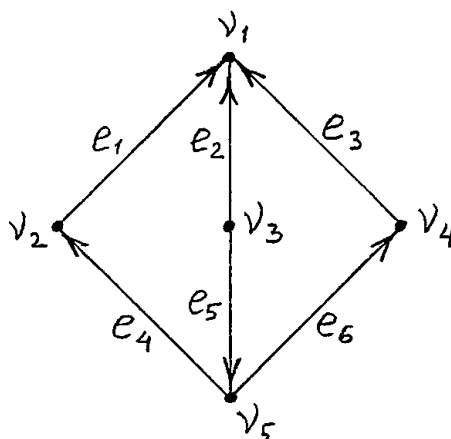


1)

Цепь содержит 5 узлов, соответственно в графе 5 вершин, причём граф ориентированный (имеет значение направление приложенной ЭДС источника тока). Направлением ребра графа будем считать направление ЭДС, приложенной к выводам элемента, соответствующего данному ребру.

Каждое из рёбер графа соответствует определённому элементу электрической цепи:

- $e_1 \leftrightarrow C$ (конденсатор)
- $e_2 \leftrightarrow E$ (источник ЭДС)
- $e_3 \leftrightarrow R3$ (резистор)
- $e_4 \leftrightarrow R1$ (резистор)
- $e_5 \leftrightarrow R2$ (резистор)
- $e_6 \leftrightarrow L$ (катушка индуктивности или дроссель)



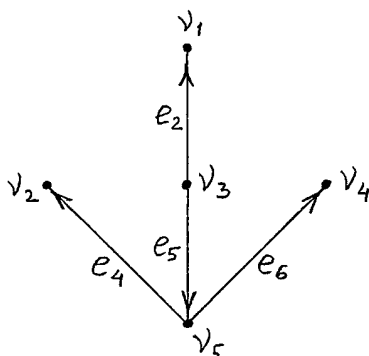
2)

Связный граф, не имеющий циклов (ациклический), называется **деревом**. Множество деревьев называется **лесом**.

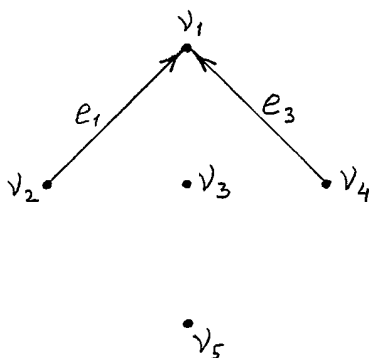
Остовом (или каркасом) связного графа называется любой его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Коостовом (кодеревом) T' остова T графа G называется дополнение T до G , т.е. такой его подграф, который содержит все его вершины и только те рёбра, которые не входят в T .

Остов графа:



Соответствующий коостов графа (включает в себя все вершины графа, а также рёбра, дополняющие остов графа до графа):



3)

Маршрут - последовательность рёбер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Очевидно, что для задания маршрута в графе достаточно задать последовательность $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ его вершин, либо последовательность $e_1, e_2, \dots, e_n$ его рёбер.

Маршрут называется **цепью**, если все его рёбра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут называется циклическим, если $v_1 = v_{n+1}$. Циклическая цепь называется **циклом**, а циклическая простая цепь - простым циклом. Число рёбер в маршруте называется его длиной. Цикл длины 3 часто называют треугольником. Длина всякого цикла не менее трёх, если речь идет о простом графе, поскольку в таком графе нет петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его обхватом.

Рёбра графа, не входящие в остов, называются **хордами**. Цикл, получающийся при добавлении к остову графа его хорды, называется **базовым** (фундаментальным) относительно этой хорды.

Разрезом (коциклом) связного графа называется множество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.

Теорема. Любой правильный разрез в связном графе можно представить как симметрическую разность некоторых фундаментальных разрезов из системы, определяемой произвольным остовом.

Следствие. Количество разрезов в фундаментальной системе равно числу рёбер остова.

Симметрическая разность:

$$A \Delta B \stackrel{Def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \& x \notin B) \vee (x \notin A \& x \in B)\}$$

(из объединения множеств вычитается пересечение множеств) или $A \Delta B \stackrel{Def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

► Запишем базисную матрицу циклов относительно выбранного остова. Мощность фундаментального множества циклов равна цикломатическому числу $\nu = m - n + c = 6 - 5 + 1 = 2$

($m = 6$ - число рёбер, $n = 5$ - число вершин, $c = 1$ - число компонент связности). Т.е. фундаментальных циклов два:

$$C_1 = (e_1, e_2, e_5, e_4)$$

$$C_2 = (e_3, e_2, e_5, e_6)$$

- фундаментальный цикл C_1 , соответствующий хорде e_1 , состоит из рёбер e_1, e_2, e_5, e_4 ;

фундаментальный цикл C_2 , соответствующий хорде e_3 , состоит из рёбер e_3, e_2, e_5, e_6 .

Запишем фундаментальную матрицу циклов, полагая соответствие столбцов рёбрам в порядке $(e_1, e_3, e_2, e_4, e_5, e_6)$ - сначала хорды. Строки соответствуют циклам в порядке (C_1, C_2) .

$$C = \begin{matrix} & e_1 & e_3 & e_2 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

► Мощность фундаментального множества коциклов (разрезов) не зависит от выбора остова и равна корангу $\nu^* = n - c = 5 - 1 = 4$. Итак, имеется 4 фундаментальных разреза.

Ребру e_2 соответствует коцикл $K_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, ребру e_4 соответствует коцикл $K_2 = \{e_1, e_4\}$, ребру e_5 соответствует коцикл $K_3 = \{e_1, e_3, e_5\}$, ребру e_6 соответствует коцикл $K_4 = \{e_3, e_6\}$.

Следовательно, матрица фундаментальных разрезов (фундаментальная матрица разрезов) имеет вид:

$$K = \begin{matrix} & e_1 & e_3 & e_2 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

► Проверим ортогональность векторов циклов к векторам разрезов.

Два подпространства V_1 и V_2 (два вектора) векторного пространства $V_m(Z_2)$ называются

ортогональными $V_1 \perp V_2$, если для любых векторов $\vec{a} \in V_1$ и $\vec{b} \in V_2$ их внутреннее произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ равно 0.

Рассмотрим алгебраическую систему $Z_2 = \{0, 1\}$ с двухместными операциями кольцевого сложения $\oplus$ и кольцевого умножения $\odot$, задаваемыми следующими правилами:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$$

$$1 \odot 1 = 1$$

Система Z_2 является булевым кольцом и, более того, образует поле [3].

Теорема. Если B - матрица инцидентий графа, C - матрица фундаментальных циклов, K - матрица фундаментальных разрезов, то в поле Z_2 выполняются следующие соотношения:

а) $B \cdot C^T = 0$, или, с тем же результатом, $C \cdot B^T = 0$;

б) $C \cdot K^T = 0$, или, с тем же результатом, $K \cdot C^T = 0$.

Матрично вычислим скалярные произведения векторов в поле Z_2 :

$$C \cdot K^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

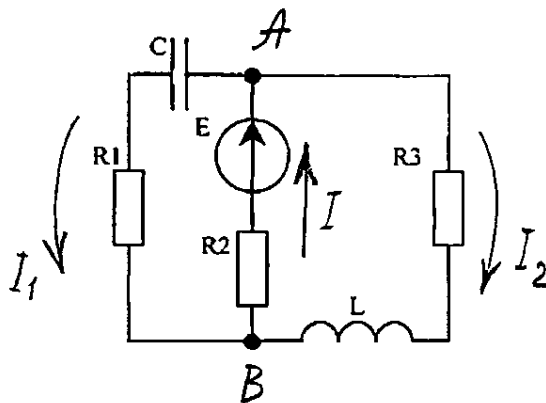
- условие ортогональности векторов циклов к векторам разрезов выполнено.

4)

Запишем соотношения между токами и соотношения между напряжениями на элементах цепи. Для решения задачи используем законы Кирхгофа.

► Первый закон Кирхгофа (узловой закон). Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю.

Токи, направленные к узлу, для которого составляется уравнение по 1-му закону, записываются в уравнение с одним знаком, а направленные от узла - с противоположным. Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

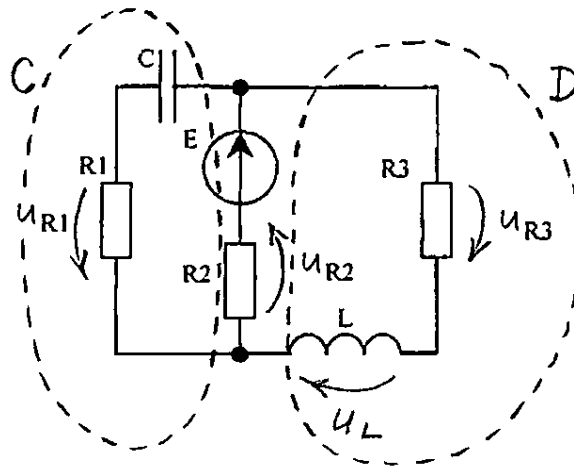


Для узлов A и B справедливо равенство:

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

► Второй закон Кирхгофа (контурный закон). Сумма напряжений в любом замкнутом контуре электрической цепи равна нулю.

При выбранном направлении обхода контура, напряжения и ЭДС, сонаправленные с этим обходом, записываются в это уравнение по 2-му закону с одним знаком, а направленные против обхода - с противоположным. Алгебраическая сумма напряжений в любом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.



Для контура C и D :

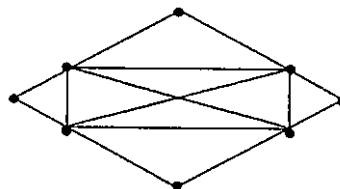
$$\begin{cases} u_C + u_{R1} + u_{R2} = E \\ u_{R3} + u_L + u_{R2} = E \end{cases}$$

Литература:

- 1) Кирсанов М.Н. "Графы в Maple", 2007, стр. 24 (хорды графа, базисные циклы);
- 2) Новиков Ф.А. "Дискретная математика для программистов", 2008, стр. 327 (остов), стр. 334 (разрез), стр. 336 (векторы фундаментальных циклов), стр. 338 (фундаментальные разрезы);
- 3) Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. "Дискретная математика", 2007, стр. 144 (матрица фундаментальных циклов, матрица фундаментальных разрезов);
- 4) Москинова Г.И. "Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях", 2004, стр. 215;
- 5) <http://rain.ifmo.ru/cat/Графы/> (Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики), 2004;
- 6) <http://teep.gubkin.ru> (законы Кирхгофа).

3) Задан граф; требуется:

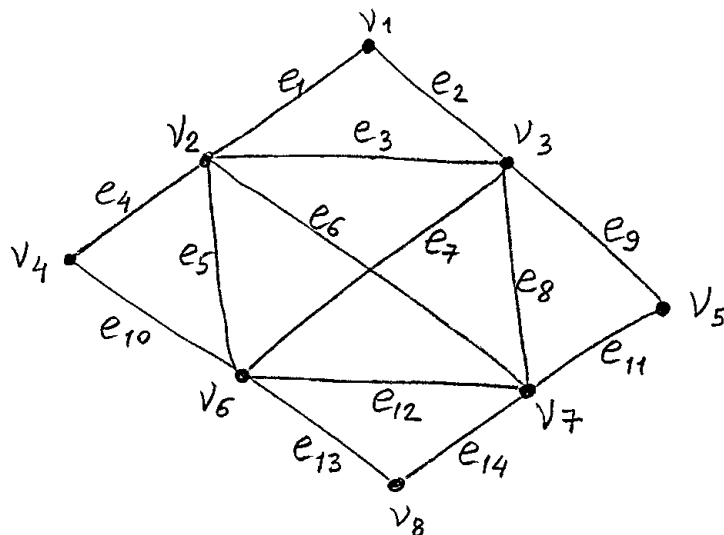
- 1) записать матрицу инцидентий графа;
- 2) проверить выполнение необходимого условия планарности графа; найти число граней графа;
- 3) выполнить чертёж графа, доказывающий его планарность; показать на чертеже все грани графа.



1)

В матрице инцидентий строкам соответствуют вершины графа v_j , столбцам соответствуют рёбра графа e_i . Элемент матрицы равен 1, если ребро e_i инцидентно вершине v_j (в случае ориентированного графа вершина v_j - конец ребра e_i). Элемент матрицы равен 2, если e_i - петля, а v_j - инцидентная ей вершина. Элемент матрицы равен 0, если вершина v_j и ребро e_i не связаны.

Обозначим вершины и рёбра графа, и запишем матрицу инцидентий.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
v_6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
v_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

2)

Граф называется плоским (планарным), если на плоскости его можно изобразить так, что все пересечения его рёбер являются его вершинами.

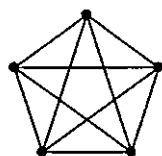
В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани.

Гранью (областью) в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

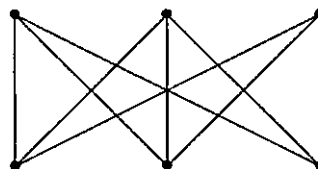
Необходимое условие планарности графа.

Теорема Портнягина-Куратовского. Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.

Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны:



K_5

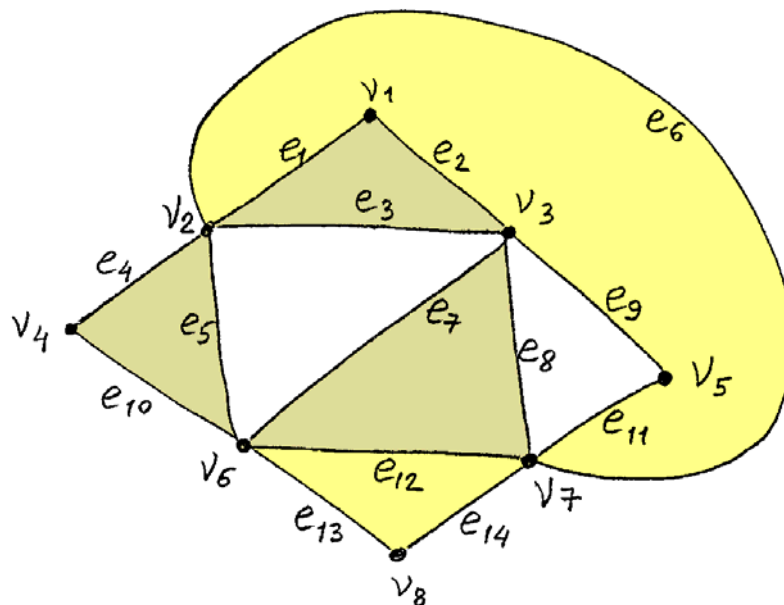


$K_{3,3}$

Очевидно, что в данном графе необходимое условие планарности графа выполнено.

3)

Изобразим данный граф без пересечения рёбер (докажем графически его планарность):



Неформально можно определить грань как часть плоскости, на которые плоскость "разрезается" линиями геометрической реализации графа. Всегда существует неограниченная внешняя грань.

Число граней данного графа равно 8.

Покажем на чертеже все грани графа, раскрасив их. Для раскраски граней достаточно трёх цветов: белый (в т.ч. внешняя грань), жёлтый, серый.

Дополнение.

Теорема Эйлера. Связный плоский граф с n вершинами и m рёбрами разбивает плоскость на r областей (граней), включая внешнюю, причём

$$n - m + r = 2.$$

Литература:

- 1) Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. "Конспект лекций по дискретной математике", 2007, стр. 85 (плоские графы);
- 2) Спирина М.С., Спирин П.А. "Дискретная математика", 2004, стр. 76 (теорема Эйлера);
- 3) <http://www.ergeal.ru> "Элементы теории графов" (ВМиК МГУ), 2004.