На приобретение машин для участка выделены 30 т.р. Производственная площадь участка - 70 м^2. Можно закупить машины двух видов: стоимостью 3 т.р. и 5 т.р. Более дорогая машина требует для установки 12 м^2 и даёт продукции на 8 т.р. в месяц. Другая машина требует 6 м^2 площади и даёт продукции на 2 т.р. Определить оптимальный план (вариант) приобретения оборудования, при котором производительность участка в месяц была бы максимальной. Требуется:

а) записать математическую модель задачи;
б) решить задачу графическим методом;
в) решить задачу симплекс-методом.

⋆ Построение математической модели задачи ⋆

Сведём данные задачи в таблицу:

вид ресурса	тип закупленных машин		объём ресурса
	x_1	x_2	
деньги, т.р.	5	3	30
площади, м^2	12	6	70
прибыль, т.р.	8	2	max

Обозначим $X=\{x_1;x_2\}$ план выпуска продукции ($x_j \ge 0$ - количество единиц продукции вида j, которое предполагается производить). Требуется найти такой план $X=\{x_1^0;x_2^0\}$, при котором прибыль будет максимальной, т.е. такой набор неотрицательных чисел, который доставляет наибольшее значение целевой функции:

$$L(X)=8x_1+2x_2 \to \max$$

при следующих ограничениях, связанных с имеющимися ресурсами сырья:

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2 \le 30 \\ 12x_1+6x_2 \le 70 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 \in Z,\ x_2 \in Z \end{cases}$$

Поскольку результат решения задачи должен быть целочисленным, имеем дело с задачей целочисленного программирования.

Известны следующие методы решения задач целочисленного программирования:

метод Баллаша,
метод Фора-Мальгранжа,
метод Гомори (метод отсечений),
метод ветвей и границ.

Используем метод Гомори, идея которого состоит в том, что поставленную задачу сначала решаем любым методом линейного программирования (используем симплекс-метод), а затем в полученном ответе выделяем дробные части и составляем дополнительное ограничение. Полученное дополнительное ограничение вводим в последнюю матрицу симплексного метода и определяем целочисленный ответ.

⋆ Графическое решение задачи ⋆

Найдём геометрически наибольшее значение линейной функции $L(X)=8x_1+2x_2$ в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2 \le 30 \\ 12x_1+6x_2 \le 70 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ x_1 \in Z,\ x_2 \in Z \end{cases}$$

Область G допустимых решений есть пересечение полуплоскостей (в скобках - уравнения их границ):

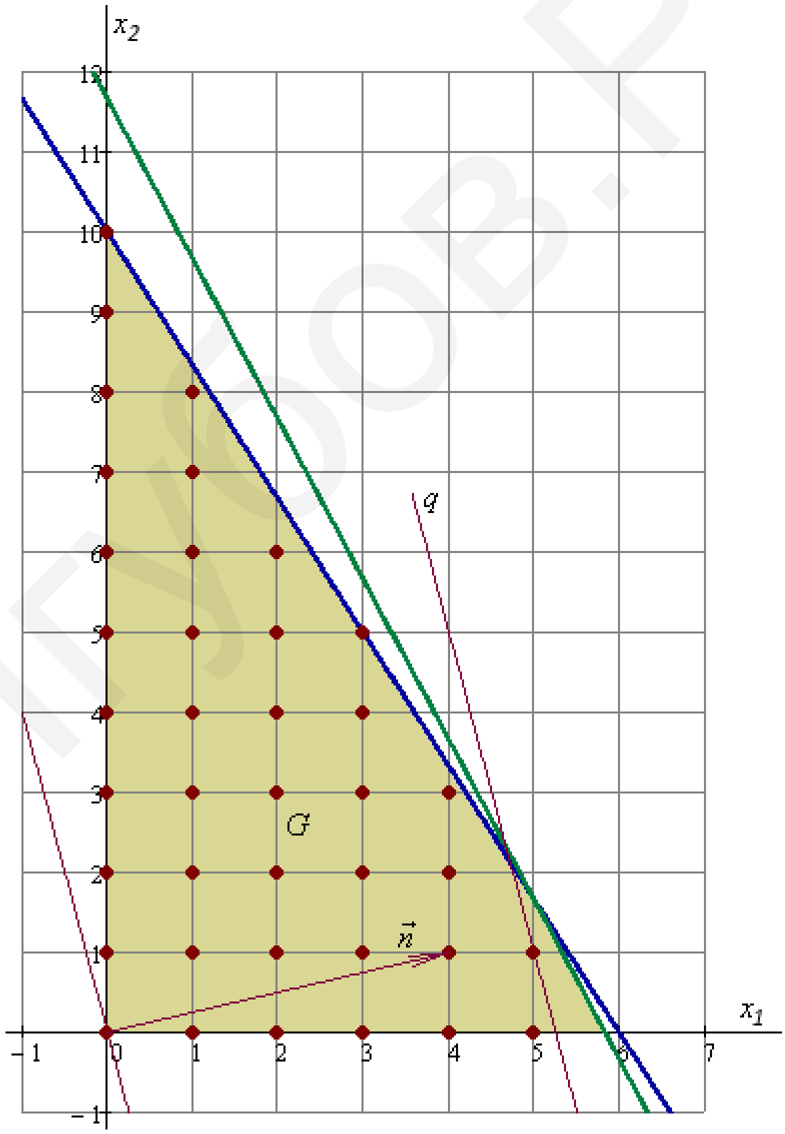
$x_2 \le -\frac{5}{3}x_1 + 10$	$\left(x_2 = -\frac{5}{3}x_1 + 10\right)$	(1)
$x_2 \le -2x_1 + \frac{35}{3}$	$\left(x_2 = -2x_1 + \frac{35}{3}\right)$	(2)
$x_1 \ge 0$	$(x_1 = 0)$	(3)
$x_2 \ge 0$	$(x_2 = 0)$	(4)

Прямая 1:

x_1	0	6
x_2	10	0

Прямая 2:

x_1	0	5
x_2	11,7	1,7



Строим вектор, сонаправленный с вектором $\vec{n} = \operatorname{grad} L(X)$ - его направление указывает на направление возрастания целевой функции $L(X) = 8x_1 + 2x_2$, например $\vec{n} = (4;1)$.

Прямая с уравнением $8x_1 + 2x_2 = 0$ представляет собой нулевую линию уровня целевой функции $L(X) = 8x_1 + 2x_2$. Эта прямая проходит через начало координат ($x_2 = -4x_1$) и перпендикулярна нормальноиу вектору линий уровня целевой функции $\vec{n} = (8;2)$. Передвигая эту прямую параллельно себе (по направлению $\vec{n}$), зафиксируем её крайнее положение q. Это верхняя опорная прямая для области G (на рисунке проведена пунктиром).

Все целочисленные решения, принадлежащие области G, выделены жирными точками. Наибольшее значение $L(x_1;x_2)$ в области G определится пересечением прямой q с решением $(5;1)$. При этом $L(5;1) = 42$ - наибольшее значение целевой функции в области G.

Ответ:

$x_1 = 5$ (план приобретения дорогих машин, ед.)

$x_2 = 1$ (план приобретения недорогих машин, ед.)

при этом

$L(5;1) = L_{\max} = 42$ (максимально возможная прибыль при данных условиях, т.р./мес.)

⋆ Симплекс-метод решения задачи ⋆

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ x_3 \ge 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 70 \\ x_4 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 8x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 70 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

$$L(X) = 8x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце $c^Б$ стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

базис	$c^Б$	8	2	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_3	0	5	3	1	0	30	30:5=6	
x_4	0	12	6	0	1	70	70:12=5,8	$\times\left(-\frac{5}{12}\right)_1$
		-8	-2	0	0	0		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_3, x_4, и начальное опорное решение:

$$x^{(0)} = (0;\ 0;\ 30;\ 70)$$

$$L^{(0)} = 8\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot 30 + 0\cdot 70 = 0$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} - 8 = -8 \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

Заметим, что запись вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ отражает скалярное произведение векторов, т.е. например

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32.$$

Здесь возможны три случая (в случае задачи на **максимум**):

- все оценки в индексной строке неотрицательны - значит полученный план оптимален;
- среди оценок есть хотя бы одна отрицательная, и в столбце над ней есть хотя бы один положительный коэффициент - план неоптимален, возможно его улучшение;
- среди оценок есть хотя бы одна отрицательная, и в столбце над ней нет ни одного положительного коэффициента - целевая функция не ограничена сверху, оптимального плана не существует.

► Поскольку в строке индексов есть отрицательные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Ведущий столбец α в случае задачи на максимум определяется по наименьшей оценке в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 1$ и в новый базис вводится переменная x_1.

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 2$ ($70:12 = 5,8$) и из базиса выводится переменная x_4.

Итак, определены ведущий столбец $\alpha = 1$, а ведущая строка $\beta = 2$.

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу. Переход от одного блока таблицы к другому осуществляем посредством элементарных преобразований Гаусса для строк.

базис	$c^Б$	8	2	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_3	0	0	1/2	1	-5/12	5/6		
x_1	8	1	1/2	0	1/12	35/6		
		0	2	0	2/3	140/3		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = \left(\frac{35}{6};\, 0;\, \frac{5}{6};\, 0\right)$$

$$L^{(1)} = 8 \cdot \frac{35}{6} + 2 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot 0 = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 2 = 2 \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -5/12 \\ 1/12 \end{pmatrix} - 0 = \frac{2}{3}$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неотрицательны.

Найдено решение, оптимальное с точки зрения получения максимальной прибыли в имеющихся условиях:

$x_1 = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ (план приобретения дорогих машин, ед.)

$x_2 = 0$ (план приобретения недорогих машин, ед.)

при этом

$L\left(\frac{35}{6};\, 0\right) = L_{\max} = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$ (максимально возможная прибыль при данных условиях)

※※

Имеем нецелочисленное значение неизвестной x_1 в полученном оптимальном решении задачи линейного программирования. Из последней симплекс-таблицы выпишем уравнение, содержащее эту неизвестную:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_4 = \frac{35}{6}$$

Запишем условие отсечения (фигурные скобки означают дробную часть числа):

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}x_2 + \left\{\frac{1}{12}\right\}x_4 \ge \left\{\frac{35}{6}\right\}$$

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_4 \ge \frac{5}{6}$$

$$6x_2 + x_4 \ge 10$$

Из канонической формы задачи имеем:

$$x_3 = 30 - 5x_1 - 3x_2$$

$$x_4 = 70 - 12x_1 - 6x_2$$

Подставляя в условие отсечения, получим:

$$6x_2 + x_4 \ge 10$$

$$6x_2 + (70 - 12x_1 - 6x_2) \ge 10$$

$$x_1 \le 5$$

Полученное соотношение присоединим к системе ограничений исходной задачи. Имеем новую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 12x_1 + 6x_2 \le 70 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 8x_1 + 2x_2 \to \max$$

Каноническая форма задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 70 \\ x_1 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

Решаем полученнную задачу в таблицах Гаусса:

базис	$c^Б$	8	2	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_3	0	5	3	1	0	0	30	30:5=6	
x_4	0	12	6	0	1	0	70	70:12=5,8	
x_5	0	1	0	0	0	1	5	5:1=5	$\times(-5)_1(-12)_2$
		-8	-2	0	0	0	0		таблица №0

$$x^{(0)} = (0;\ 0;\ 30;\ 70;\ 5)$$

$$L^{(0)} = 8\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot 30 + 0\cdot 70 + 0\cdot 5 = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 = -8 \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

базис	$c^Б$	8	2	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_3	0	0	3	1	0	-5	5	5:3=1,7	$\times(-2)_2(0)_3$
x_4	0	0	6	0	1	-12	10	10:6=1,7	
x_1	8	1	0	0	0	1	5		
		0	-2	0	0	8	40		таблица №1

$$x^{(1)} = (5;\ 0;\ 5;\ 10;\ 0)$$

$$L^{(1)} = 8\cdot 5 + 2\cdot 0 + 0\cdot 5 + 0\cdot 10 + 0\cdot 0 = 40$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -2 \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 8$$

Замечания.

- Если $a_{i\alpha} \le 0$, то θ_i не вычисляется.
- При вычислении θ_i может получиться так, что минимум отношения окажется одинаковым для нескольких

номеров i, т.е. сразу несколько строк таблицы могут быть разрешающими. Если выбирать ведущую строку произвольно, то это может привести к зацикливанию алгоритма симплекс-метода (вырожденный случай). Чтобы избежать этого, рекомендуется этот выбор осуществлять по определённому правилу, например: для данных строк таблицы вычисляются отношения $a_{i1}/a_{i\alpha}$, начиная по порядку с $i = 1$, и находится строка, для которой это отношение является минимальным (по величине). Если такая строка единственная, то её считают разрешающей. В противном случае вычисляются следующие отношения $a_{i2}/a_{i\alpha}$ и т.д. В результате получим единственную разрешающую строку.

В двух строках получены одинаковые наименьшие значения $\theta_1 = \theta_2 = 1{,}7$, поэтому сравнивая $\frac{a_{15}}{a_{12}} = \frac{-5}{3} > \frac{a_{25}}{a_{22}} = \frac{-12}{6} = -2$, выберем в качестве ведущей строку $\beta = 1$.

базис	$c^Б$	8	2	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_2	2	0	1	1/3	0	-5/3	5/3		
x_4	0	0	0	-2	1	-2	0		
x_1	8	1	0	0	0	1	5		
		2	0	2/3	0	14/3	130/3		таблица №2

$$x^{(2)} = \left(5;\ \frac{5}{3};\ 0;\ 0;\ 0\right)$$

$$L^{(2)} = 8\cdot 5 + 2\cdot\frac{5}{3} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 43\frac{1}{3}$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{2}{3} \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{14}{3}$$

План оптимален, но не переменная x_2 не целочислена. Далее, следуя методу Гомори, надо повторить цикл отсечения, введя дополнительное условие отсечения.

$$x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_5 = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 \ge \frac{2}{3}$$

$$x_3 - 2x_5 \ge 2$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 = 30 - 5x_1 - 3x_2 \\ x_5 = 5 - x_1 \end{array}\right.$$

$$30 - 5x_1 - 3x_2 - 2\cdot(5 - x_1) \ge 2$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

Но в данном случае легко догадаться, что при этом будет получено целочисленное решение

$$x^{(3)} = (5;\, 1;\, *;\, 0;\, 0)$$

$$L^{(3)} = 8 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot * + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 42$$

Ответ:

$x_1 = 5$ (план приобретения дорогих машин, ед.)

$x_2 = 1$ (план приобретения недорогих машин, ед.)

при этом

$L(5;1) = L_{\max} = 42$ (максимально возможная прибыль при данных условиях, т.р./мес.)

⋆ Решение задачи в Mathcad 14 ⋆

Первый цикл решения:

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1$

$L(x_1, x_2) := 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Given

$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 30$

$12 x_1 + 6 \cdot x_2 \le 70$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

$y := \text{Maximize}(L, x_1, x_2)$

$$y = \begin{pmatrix} 5\frac{5}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$L(y_0, y_1) = 46\frac{2}{3}$

Второй цикл решения:

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1$

$L(x_1, x_2) := 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Given

$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 30$

$12x_1 + 6 \cdot x_2 \le 70$

$x_1 \le 5$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

$y := \text{Maximize}(L, x_1, x_2)$

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$L(y_0, y_1) = 43\frac{1}{3}$

Третий цикл решения:

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1$

$L(x_1, x_2) := 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Given

$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 30$

$12x_1 + 6 \cdot x_2 \le 70$

$x_1 \le 5$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

$y := \text{Maximize}(L, x_1, x_2)$

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$L(y_0, y_1) = 42$

Литература:

1) Тюлюкин В.А. “Исследование операций”, методичка УрГЭУ (Екатеринбург), 2002;

2) Лунгу К.Н. "Линейное программирование; руководство к решению задач", 2005, стр. 28 (пример 3.1 - графический метод), стр. 56 (пример 4.6 - симплекс-метод), стр. 66 (двойственность);

3) Истомин Л.А., Степин В.П. "Математическое программирование", методичка УрГЭУ, 2003, стр. 10...18 (решение типовой задачи линейного программирования);

4) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Mathcad 12", 2005, стр. 223 (задача 8.3);

5) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006, стр. 133 (метод Гомори).