Минимизировать транспортные расходы на перевозку из пунктов производства A_1, A_2, A_3, A_4 в B_1, B_2, B_3, B_4 пунктов потребления. Спрос 800, 600, 1400 и 600. Складские запасы 700, 800, 900, 1000.

Матрица стоимостей перевозок:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 0,2 & 0,7 & 0,3 \\ 11 & 0,8 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,9 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Решим транспортную задачу методом потенциалов. Сведём данные задачи в стандартную таблицу:

A\B	800	600	1400	600
700	0,3	0,7	0,5	0,8
800	0,6	0,2	0,7	0,3
900	11	0,8	0,3	0,7
1000	0,4	0,9	0,3	0,5

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:
а) определение исходного опорного решения;
б) построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.

Решение считается оптимальным, если найденная неотрицательная матрица X удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \\ L(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \end{cases}$$

Теорема: для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Проверяем задачу на условие правильности баланса:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 700 + 800 + 900 + 1000 = 3400$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 800 + 600 + 1400 + 600 = 3400$$

Условие правильности баланса соблюдено - задача является закрытой.

Последовательность дальнейших действий такова:

- составим распределительную (транспортную) таблицу для закрытой задачи,
- строим начальный опорный план,
- вычисляем потенциалы (для занятых поставками клеток) *,
- вычисляем оценки (для незанятых клеток).

Если получится хотя бы одна отрицательная оценка, то план неоптимален, и для клетки с наибольшей (по модулю) отрицательной оценкой построим цикл пересчёта, тем самым улучшив план. Для нового опорного плана повторяем все вычисления, начиная с пункта *.

Если же все оценки неотрицательны, то план перевозок оптимален; вычислим его стоимость и выпишем матрицу перевозок, не включая в неё фиктивного поставщика или фиктивного потребителя, если таковые были.

ЯГУБОВ.РФ

Для облегчения ручных вычислений увеличим в 10 раз все элементы матрицы стоимостей, а спрос и запасы уменьшим в 100 раз. Найденный оптимальный план от этого не изменится; величина целевой функции при этом будет меньше в 10 раз (коэффициент 10/100=1/10).

	№	6	1	5	7	
№	A\B	8	6	14	6	u_i
2	7	3 7	7	5	8	0
4	8	6	2 6	7	3 2	-1
3	9	110	8	3 9	7	1
7	10	4 1	9	3 5	5 4	1
	v_j	3	3	2	4	№0

$$L(X) = 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 3\cdot 9 + 4\cdot 1 + 3\cdot 5 + 5\cdot 4 = 105$$

► Определим начальный план. Начальный план составим методом минимальных тарифов (альтернативный метод - правило "северо-западного угла").

№	min тариф	поставка	вычёркиваем
1	$c_{22} = 2$	$x_{22} = 6$	$j = 2$
2	$c_{11} = 3$	$x_{11} = 7$	$i = 1$
3	$c_{33} = 3$	$x_{33} = 9$	$i = 3$
4	$c_{24} = 3$	$x_{24} = 2$	$i = 2$
5	$c_{43} = 3$	$x_{43} = 5$	$j = 3$
6	$c_{41} = 4$	$x_{41} = 1$	$j = 1$
7	$c_{44} = 5$	$x_{44} = 4$	$i = 4,\ j = 4$

Заметим, что на последнем шаге всегда происходит одновременное освобождение строки и столбца; так что в благоприятном (невырожденном) случае получается $m+n-1$ заполненных клеток таблицы (m - количество строк, n - количество столбцов).

Клетки таблицы, в которых записаны поставки, называются базисными, а остальные клетки - свободными.

Полученный план невырожденный ($m+n-1 = 3+4-1 = 6$).

Неотрицательная матрица X, удовлетворяющая условиям задачи, называется планом (или допустимым планом) задачи. Допустимый план называется оптимальным, если он доставляет минимум целевой функции.

Допустимый план, имеющий не более $m+n-1$ отличных от нуля компонентов x_{ij}, называется базисным, или опорным. Опорный план, имеющий ровно $m+n-1$ отличных от нуля компонент, называется невырожденным, а если число отличных от нуля компонент меньше, чем $m+n-1$, то план называется вырожденным.

Оценим полученный план перевозок методом потенциалов. К строкам и столбцам матрицы затрат $\|c_{ij}\|$, оформленной в виде распределительной таблицы, подберём числа u_i и v_j так, чтобы $u_i + v_j = c_{ij}$ для каждой **занятой** клетки $(i,\ j)$. Числа u_i и v_j называются потенциалами.

Поскольку число занятых клеток равно $m+n-1$, то для однозначного определения потенциалов u_i, v_j один из них можно брать произвольно, например, $u_1=0$ (или число, отличное от нуля - неважно).

Потенциалы записываются в дополнительных строке и столбце. Пусть $u_1=0$, тогда остальные потенциалы находятся последовательно следующим образом:

$$u_1+v_1=c_{11}=3 \quad \to \quad v_1=3$$
$$u_4+v_1=c_{41}=4 \quad \to \quad u_4=1$$
$$u_4+v_3=c_{43}=3 \quad \to \quad v_3=2$$
$$u_4+v_4=c_{44}=5 \quad \to \quad v_4=4$$
$$u_2+v_4=c_{24}=3 \quad \to \quad u_2=-1$$
$$u_2+v_2=c_{22}=2 \quad \to \quad v_2=3$$
$$u_3+v_3=c_{33}=3 \quad \to \quad u_3=1$$

► Проверяем план на оптимальность, вычисляя оценки всех клеток таблицы. Поскольку оценки для занятых клеток равны нулю, вычисляем оценки для всех незанятых клеток:

$$\Delta_{12}=c_{12}-u_1-v_2=7-0-3=4$$
$$\Delta_{13}=c_{13}-u_1-v_3=5-0-2=3$$
$$\Delta_{14}=c_{14}-u_1-v_4=8-0-4=4$$
$$\Delta_{21}=c_{21}-u_2-v_1=6-(-1)-3=4$$
$$\Delta_{23}=c_{23}-u_2-v_3=7-(-1)-2=6$$
$$\Delta_{31}=c_{31}-u_3-v_1=110-1-3=106$$
$$\Delta_{32}=c_{32}-u_3-v_2=8-1-3=4$$
$$\Delta_{34}=c_{34}-u_3-v_4=7-1-4=3$$
$$\Delta_{42}=c_{42}-u_4-v_2=9-1-3=5$$

Отрицательных оценок нет, следовательно, удалось с первой попытки найти оптимальный план перевозок груза с матрицей объёмов перевозок (возвращаемся к исходному масштабу величин, умножая найденные объёмы перевозок на 100):

$$X=\begin{pmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 900 & 0 \\ 100 & 0 & 500 & 400 \end{pmatrix}$$

При этом затараты на перевозку составят
(возвращаемся к исходному масштабу величин, умножив значение целевой функции на 10):

$$L(X)=1050.$$

Замечание. Если одна или несколько оценок свободных клеток равны нулю, то транспортная задача имеет альтернативные оптимальные решения. В данном случае найденное решение единственно.

ЯГУБОВ.РФ

Решение задачи в Mathcad 14:

$$ORIGIN := 1$$

$$c := \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} & \frac{5}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ 11 & \frac{8}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 1400 \\ 600 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 700 \\ 800 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad m := last(b) = 4 \quad n := last(a) = 4 \quad x_{n,m} := 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 3400 \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j = 3400$$

$$F(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(c_{i,j} \cdot x_{i,j}\right) \qquad f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad f_i \leftarrow \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \\ f \end{array} \right. \qquad g(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..m \\ \quad g_j \leftarrow \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \\ g \end{array} \right.$$

$$\text{Given} \quad x \geq 0 \quad f(x) = a \quad g(x) = b \quad x := \text{Minimize}(F, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 900 & 0 \\ 100 & 0 & 500 & 400 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 1050$$

Литература:

1) Лунгу К.Н. "Линейное программирование; руководство к решению задач", 2005, стр. 85;
2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 1, 2003, стр. 288;
3) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Mathcad 12", 2005, стр. 224;
4) Истомин Л.А., Степин В.П. "Математическое программирование", 2003, стр. 19 (решение транспортной задачи методом потенциалов);
5) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006, стр. 109 (транспортная задача).

ЯКУБОВ.РФ