

Решить задачу линейного программирования, где

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

- а) геометрическим способом,
- б) перебором базисных решений,
- в) симплекс-методом.

★ Графическое решение задачи ★

Найдём геометрически наибольшее значение линейной функции $L(X) = 3x_1 + 4x_2$ в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Область G допустимых решений есть пересечение полуплоскостей (в скобках - уравнения их границ):

$$x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + 4 \quad \left(x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 4 \right) \quad (1)$$

$$x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2} \quad \left(x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2} \right) \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad \left(x_1 = 0 \right) \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad \left(x_2 = 0 \right) \quad (4)$$

Прямая 1:

x_1	0	2
x_2	4	1

Прямая 2:

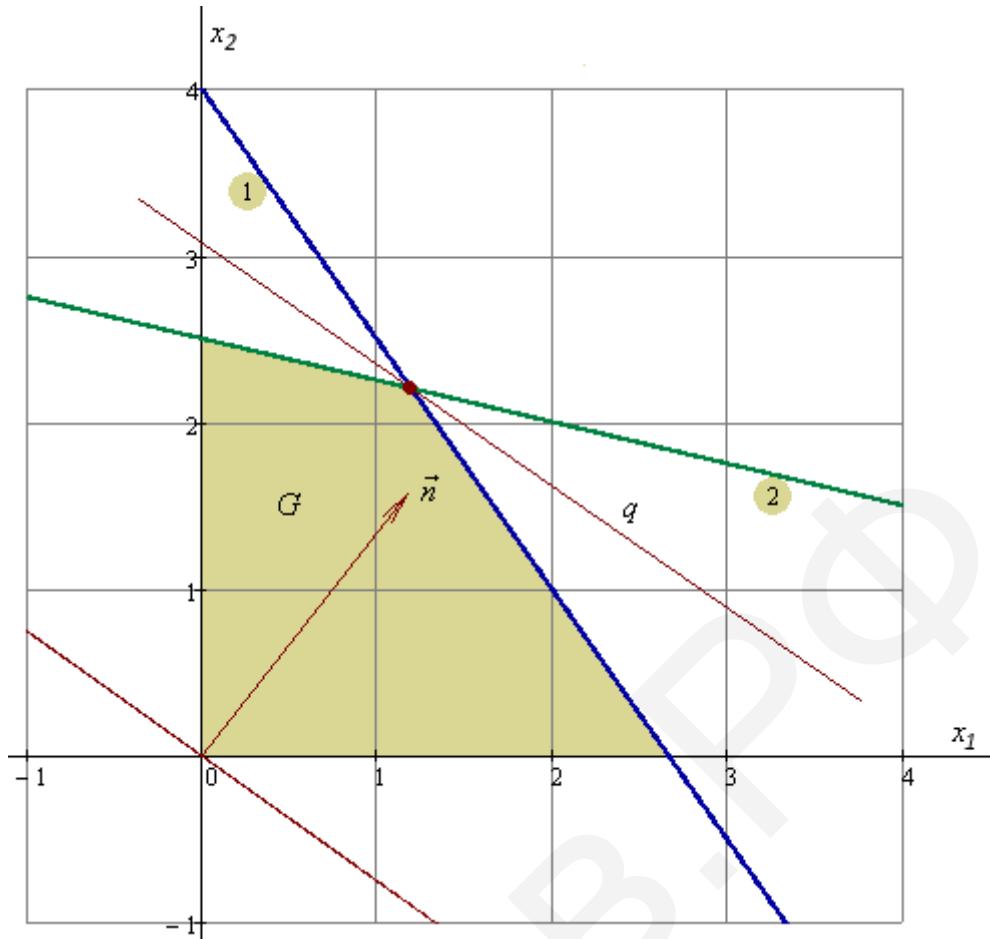
x_1	0	2
x_2	2,5	2

Строим вектор, сонаправленный с вектором $\vec{n} = \operatorname{grad} L(X)$ - его направление указывает на направление возрастания целевой функции $L(X) = 3x_1 + 4x_2$, например $\vec{n} = (3; 4)$.

Прямая с уравнением $3x_1 + 4x_2 = 0$ представляет собой нулевую линию уровня целевой функции

$L(X) = 3x_1 + 4x_2$. Эта прямая проходит через начало координат ($x_2 = -\frac{3}{4}x_1$) и перпендикулярна

нормальному вектору линий уровня целевой функции $\vec{n} = (3; 4)$. Передвигая эту прямую параллельно себе (по направлению \vec{n}), фиксируем её крайнее положение q . Это верхняя опорная прямая для области G .



Наибольшее значение $L(x_1; x_2)$ в области G определится пересечением прямых 1 и 2:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 4 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \end{cases}$$

$L(1,2 ; 2,2) = 12,4$ - наибольшее значение целевой функции в области G .

★ Решение задачи путём перебора базисных решений ★

1-й способ оформления - непосредственная работа с системой уравнений.

Перейдём к системе уравнений, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_4 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

Найдём все базисные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных, входящих в него. Это будут опорные решения системы уравнений. Среди опорных решений выберем решение, доставляющее максимум функции цели.

Переменные, относительно которых разрешена система линейных уравнений, называются **базисными переменными**. Число базисных переменных равно рангу системы. Все остальные переменные называются **свободными**.

Среди всевозможных решений выберем такие, у которых значения всех свободных переменных равны нулю. Эти решения системы называют **базисными решениями**. Число базисных решений равно

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

где n - количество переменных системы линейных уравнений;

r - ранг матрицы системы.

Последовательность перебора базисных решений, когда каждое последующее решение отличается от предыдущего только одной базисной переменной, называют **правильной**. Всегда можно построить правильную последовательность базисных решений.

Например, если число переменных системы линейных уравнений $n = 4$, а ранг матрицы системы $r = 2$, то правильную последовательность базисных решений можно условно записать как
0011, 0101, 1001, 1010, 0110, 1100.

Такие переходы от одного базисного решения к другому базисному решению называют **преобразованиями однократного замещения**, т.к. требуется лишь одна итерация метода Жордана-Гаусса. Название преобразования связано с тем, что в базис вводится одна из свободных переменных, в то время как одна из существующих базисных переменных становится свободной. Таким образом, вводимая в базис свободная переменная **замещает** в базисе одну из переменных.

Базисные решения системы линейных уравнений, у которых значения всех базисных переменных неотрицательны, называют **опорными решениями**. Каждому опорному решению системы линейных ограничений задачи линейного программирования соответствуют координаты угловых точек области определения функции цели, и обратно, каждой угловой точке области определения функции цели соответствует опорное решение системы линейных ограничений задачи.

► Пусть x_3, x_4 - базисные переменные, x_1, x_2 - свободные (комбинация 0011).

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 10 - x_1 - 4x_2 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Решение является базисным при нулевых свободных переменных, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = 10 \\ L(X) = 0 \end{cases}$$

- первое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 1-е опорное решение.

► Теперь x_2, x_4 - базисные переменные, x_1, x_3 - свободные (комбинация 0101).

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = -6 + 5x_1 + 2x_3 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = -6 \end{cases}$$

- второе базисное решение, опорным не является.

► Теперь x_1, x_4 - базисные переменные, x_2, x_3 - свободные (комбинация 1001).

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \frac{22}{3} - \frac{10}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_4 = 22/3 \\ L(X) = 8 \end{cases}$$

- третье базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 2-е опорное решение.

► Теперь x_1, x_3 - базисные переменные, x_2, x_4 - свободные (комбинация 1010).

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 4x_2 - x_4 \\ x_3 = -22 + 10x_2 + 3x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_3 = -22 \end{cases}$$

- четвёртое базисное решение, опорным не является.

► Теперь x_2, x_3 - базисные переменные, x_1, x_4 - свободные (комбинация 0110).

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = 3 - \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5/2 \\ x_3 = 3 \\ L(X) = 10 \end{cases}$$

- пятое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 3-е опорное решение.

► Теперь x_1, x_2 - базисные переменные, x_3, x_4 - свободные (комбинация 1100).

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{11}{5} + \frac{1}{10}x_3 - \frac{3}{10}x_4 \\ L(X) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \\ L(X) = 62/5 \end{cases}$$

- шестое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 4-е опорное решение.

Решение задачи находим среди опорных решений, выбрав решение, доставляющее максимум целевой функции:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \\ L(1,2;2,2) = 12,4 \end{cases}$$

2-й способ оформления - с применением таблиц Гаусса.

Перейдём к системе уравнений, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_4 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

Найдём все базисные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных, входящих в него. Это будут опорные решения системы уравнений. Среди опорных решений выберем решение, доставляющее максимум функции цели.

► Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение является базисным при нулевых свободных переменных, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = 10 \\ L(X) = 0 \end{cases}$$

- первое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 1-е опорное решение.

► Выбрав в качестве разрешающего элемента $(1; 2)$ (1-я строка, 2-й столбец), преобразованием однократного замещения (используем метод Жордана-Гаусса) перейдём к следующему базисному решению.

Выбор разрешающего столбца определяет свободную переменную, которая вводится в базис, а выбор разрешающей строки определяет базисную переменную, которая будет выведена из базиса.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = -6 \end{cases}$$

- второе базисное решение, опорным не является.

► Переходим к следующему базисному решению.

$$\left(\begin{array}{ccccc} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{22}{3} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_4 = \frac{22}{3} \\ L(X) = 8 \end{array} \right.$$

- третье базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 2-е опорное решение.



$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{22}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 1 & -3 & -22 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_3 = -22 \end{array} \right.$$

- четвёртое базисное решение, опорным не является.



$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 1 & -3 & -22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2} \\ x_3 = 3 \\ L(X) = 10 \end{array} \right.$$

- пятое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 3-е опорное решение.



$$\left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{11}{5} \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{5} \\ x_2 = \frac{11}{5} \\ L(X) = \frac{62}{5} \end{array} \right.$$

- шестое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны; 4-е опорное решение.

Найдены все базисные решения заданной системы линейных уравнений. Решение задачи находим среди опорных решений, выбрав решение, доставляющее максимум целевой функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{5} \\ x_2 = \frac{11}{5} \\ L(1,2;2,2) = 12,4 \end{array} \right.$$

Сделаем перебор базисных решений в Mathcad 14, переложив на программу рутинные вычисления каждого шага; преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой $JG(M, a, b)$:

```

ORIGIN := 1

JG(M,a,b) := | for i ∈ 1..rows(M)
                for j ∈ 1..cols(M)
                    Ni,j ← Mi,j if i = a
                    Ni,j ← Mi,j - Ma,b · Ma,j otherwise
                |
                | N
            |
        | функция, выполняющая преобразование
        | Жордана-Гаусса относительно указанного
        | элемента (a,b) матрицы M.
        | (a - номер строки, считая с 1;
        | b - номер столбца, считая с 1)

A := JG(A,1,2) → ⎛ 3 2 1 0 8 ⎞
                  ⎝ 1 4 0 1 10 ⎠
A := JG(A,1,1) → ⎛ 3 1 1/2 0 4 ⎞
                  ⎝ 2 -5 0 -2 1 -6 ⎠
A := JG(A,2,3) → ⎛ 1 2 1/3 0 8/3 ⎞
                  ⎝ 0 10 -1/3 1 22/3 ⎠
A := JG(A,1,2) → ⎛ 1/4 1 0 1/4 5/2 ⎞
                  ⎝ 5/2 0 1 -1/2 3 ⎠
A := JG(A,2,1) → ⎛ 0 1 -1/10 3/10 11/5 ⎞
                  ⎝ 1 0 2/5 -1/5 6/5 ⎠
    
```

★ Симплекс-метод решения задачи ★

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Задачу линейного программирования будем считать приведённой к каноническому виду, если:

- система ограничений содержит только равенства;
- правые части системы ограничений неотрицательны.

Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце c^B стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

базис	c^B	3	4	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_3	0	3	2	1	0	8	8:4=2	
x_4	0	1	4	0	1	10	10:4=2,5	$\times \left(-\frac{1}{2}\right)_1$
		-3	-4	0	0	0		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_3, x_4 , и начальное опорное решение:

$$x^{(0)} = (0; 0; 8; 10)$$

$$L^{(0)} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 0$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3 \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

► Поскольку в строке индексов есть отрицательные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Ведущий столбец α в случае задачи на максимум определяется по наименьшей оценке в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 2$ и в новый базис вводится переменная x_2 .

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 2$ ($\theta_2 = 10 : 4 = 2,5$) и из базиса выводится переменная x_4 .

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу. Переход от одного блока таблицы к другому осуществляется посредством элементарных преобразований Гаусса для строк.

базис	c^B	3	4	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_3	0	5/2	0	1	-1/2	8	3:2,5=1,2	$\times \left(-\frac{1}{10}\right)_2$
x_2	4	1/4	1	0	1/4	10	2,5:0,25=10	
		-2	0	0	1	10		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = (0; 2,5; 3; 0)$$

$$L^{(1)} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2,5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 10$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - 3 = -2 \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

► В строке индексов отрицательная оценка, следовательно, опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

Сейчас ведущий столбец $\alpha = 1$, а ведущая строка $\beta = 1$ ($\theta_1 = 3 : 2,5 = 1,2$).

базис	c^B	3	4	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4			
x_1	3	1	0	2/5	-1/5	6/5		
x_2	4	0	1	-1/10	3/10	11/5		
		0	0	4/5	3/5	12,4		таблица №2

Новый опорный план:

$$x^{(2)} = (1,2; 2,2; 0; 0)$$

$$L^{(2)} = 3 \cdot 1,2 + 4 \cdot 2,2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 12,4$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix} - 0 = \frac{4}{5} \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{5}$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является **оптимальным**, т.к. оценки в строке индексов все неотрицательны.

Найдено решение, оптимальное с точки зрения максимизации целевой функции в имеющихся условиях:

$$\begin{cases} x_1 = 6/5 \\ x_2 = 11/5 \\ L(1,2; 2,2) = 12,4 \end{cases}$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

$$L(x_1, x_2) := 3x_1 + 4x_2$$

Given

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$y := \text{Maximize}(L, x_1, x_2)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$L(y_0, y_1) = 12.4$$

То же самое в матричном виде:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) := c \cdot x \quad \text{Given} \quad A \cdot x \leq b \quad x \geq 0 \quad y := \text{Maximize}(L, x)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \end{pmatrix} \quad L(y) = 12.4 \quad A \cdot y = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Решение задачи в Mathcad 14 с выводом всех промежуточных таблиц; преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой $JG(M, a, b)$:

```

ORIGIN := 1
JG(M,a,b) := | for i ∈ 1..rows(M)           функция, выполняющая преобразование
                for j ∈ 1..cols(M)       Жордана-Гаусса относительно указанного
                | Ni,j ← Mi,j / Ma,b if i = a   элемента (a,b) матрицы M.
                | Ni,j ← Mi,j - Mi,b · Ma,j / Ma,b   (a - номер строки, считая с 1;
                | Ni,j ← Mi,j otherwise           b - номер столбца, считая с 1)
                |
N

```

0) $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) $A := JG(A, 2, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

2) $A := JG(A, 1, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{62}{5} \end{pmatrix}$

Литература:

- 1) Ермаков В.И. и др. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр. 540;
- 2) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006, стр. 60;
- 3) Лунгу К.Н. "Линейное программирование; руководство к решению задач", 2005;
- 4) Рудык Б.М. и др. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2006.
- 5) Охорзин В.А. "Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad 12", 2005, стр. 19;
- 6) Сдвижков О.А. "Mathcad-2000: введение в компьютерную математику", 2002, стр. 153;
- 7) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Mathcad 12", 2005, стр. 224.