1) Задача о планировании производства.

Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: A и B. На производство единицы изделия A оборудование первого типа используется 1 час, оборудование второго типа - 4 часа. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется 2 часа, оборудование второго типа - 2 часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет 120 часов, второго типа оборудования - 240 часов. Отпускная цена единицы изделия A составляет 4 руб., а изделия B - 6 руб.

Спланировать выпуск изделий A и B при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее 320 руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

Решить задачу графическим и симплексным методом.

Построение математической модели задачи.

Сведём данные задачи в таблицу:

оборудование	затраты времени на единицу изделия, ч		фонд полезного времени, ч
	A	B	
1-го типа	1	2	120
2-го типа	4	2	240
отпускная цена, р./шт.	4	6	

Система, учитывающая все поставленные условия, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 240 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 320 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \quad \to \quad \min$$

Симплекс-метод решения задачи, метод искусственного базиса.

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Задачу линейного программирования будем считать приведённой к каноническому виду, если:

- система ограничений содержит только равенства;
- правые части системы ограничений неотрицательны.

► Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 240 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_5 = 320 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min$$

Задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Применяя метод искусственного базиса, составляем расширенную задачу. В левую часть 3-го уравнения системы ограничений вводим неотрицательную искусственную переменную x_6 с коэффициентом +1. Данная задача - задача на нахождение минимума, поэтому эта переменная в целевую функцию вводится с коэффициентом +M (предполагаем $M \gg 1$):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 240 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_5 + x_6 = 320 \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + Mx_6 \to \min$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце $c^Б$ стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

базис	$c^Б$	1	2	0	0	0	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_3	0	1	2	1	0	0	0	120	120:2=60	
x_4	0	4	2	0	1	0	0	240	240:2=120	
x_6	M	4	**6**	0	0	-1	1	320	320:6=**53**	$\times\left(-\frac{1}{3}\right)_1 \left(-\frac{1}{3}\right)_2$
		4M	**6M**	0	0	-M	0	320M		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_3, x_4, x_6, и начальное опорное решение:

$$x^{(0)} = (0;\ 0;\ 120;\ 240;\ 0;\ 320)$$

$$L^{(0)} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 0 + M \cdot 320 = 320M$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \approx 4M \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \approx 6M \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

Здесь возможны три случая (если задача на **минимум** целевой функции):

- все оценки в индексной строке неположительны - значит полученный план оптимален;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней есть хотя бы один положительный коэффициент - план неоптимален, возможно его улучшение;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней нет ни одного положительного коэффициента - целевая функция не ограничена сверху, оптимального плана не существует.

► Поскольку в строке индексов есть положительные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Ведущий столбец α в случае задачи на минимум определяется по наибольшей оценке в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 2$ и в новый базис вводится переменная x_2.

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 3$ ($320 : 6 \approx 53$) и из базиса выводится переменная x_6.

Итак, определены ведущий столбец $\alpha = 2$ и ведущая строка $\beta = 3$.

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу.

базис	$c^Б$	1	2	0	0	0	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_3	0	-1/3	0	1	0	1/3	-1/3	40/3		
x_4	0	**8/3**	0	0	1	1/3	-1/3	400/3	400:8=**50**	$\times\left(\frac{1}{8}\right)_1 \left(-\frac{1}{4}\right)_3$
x_2	2	2/3	1	0	0	-1/6	1/6	160/3	160:2=80	
		1/3	0	0	0	-1/3	-M	320/3		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = \left(0;\ \frac{160}{3};\ \frac{40}{3};\ \frac{400}{3};\ 0;\ 0\right)$$

$$L^{(1)} = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{160}{3} + 0\cdot\frac{40}{3} + 0\cdot\frac{400}{3} + 0\cdot 0 + M\cdot 0 = \frac{320}{3}$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}-1/3\\8/3\\2/3\end{pmatrix} - 1 = \frac{1}{3} \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1/6\end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{3} \qquad \Delta_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1/6\end{pmatrix} - M \approx -M$$

► В строке индексов положительная оценка, следовательно, опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

базис	$c^Б$	1	2	0	0	0	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
x_3	0	0	0	1	1/8	3/8	-3/8	30		
x_1	1	1	0	0	3/8	1/8	-1/8	50		
x_2	2	0	1	0	-1/4	-1/4	1/4	20		
		0	0	0	-1/8	-3/8	-M	90		таблица №2

Опорный план:

$$x^{(2)} = (50;\ 20;\ 30;\ 0;\ 0;\ 0)$$

$$L^{(2)} = 1\cdot 50 + 2\cdot 20 + 0\cdot 30 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + M\cdot 0 = 90$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}1/8\\3/8\\-1/4\end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{8} \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}3/8\\1/8\\-1/4\end{pmatrix} - 0 = -\frac{3}{8} \qquad \Delta_6 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}-3/8\\-1/8\\1/4\end{pmatrix} - M \approx -M$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неположительны.

Если в результате решения задачи с искусственным базисом (M -задачи):

- получено оптимальное решение, в котором все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения M -задачи путём отбрасывания всех искусственных переменных;
- получено оптимальное решение, в котором хотя бы одна из искусственных переменных не равна нулю, то исходная задача решений не имеет (ввиду несовместности системы ограничений);
- установлено, что M -задача решений не имеет, то исходная задача также решений не имеет (ввиду неограниченности целевой функции).

Найдено решение, оптимальное с точки зрения минимизации целевой функции в имеющихся условиях:

$x_1 = 50$ (план производства изделия A, ед.)

$x_2 = 20$ (план производства изделия B, ед.)

при этом

$L(50;\ 20) = 90$ (минимально возможная загрузка оборудования 1-го типа при данных условиях, ч)

Прибыль от реализации произведённых изделий составит $50 \cdot 4 + 20 \cdot 6 = 320$ руб.

Ответ: 50 - план производства изделия A (ед.),
20 - план производства изделия B (ед.);
90 - загрузка оборудования 1-го типа (ч);
320 - прибыль при выполненном плане (руб.).

Симплекс-метод решения задачи без использования метода искусственного базиса.

Задача в каноническом виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 240 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_5 = 320 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min$$

► Находим какое-нибудь неотрицательное базисное решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 240 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & -1 & 320 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 6 & 4 & -1 & 0 & 240 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 160 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 6 & 4 & -1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 3 & 240 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/6 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 8/3 & 1/3 & 1 & 80 \end{pmatrix}$$

Далее решение продолжаем в симплекс-таблицах:

базис	$c^Б$	1	2	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_1	1	1	0	-1/3	1/3	0	40		
x_2	2	0	1	2/3	-1/6	0	40	40:(2/3)=60	
x_5	0	0	0	**8/3**	1/3	1	80	80:(8/3)=**30**	$\times\left(\frac{1}{8}\right)_1 \left(-\frac{1}{4}\right)_2$
		0	0	**1**	0	0	120		таблица №0

Опорный план:

$$x^{(0)} = (40;\ 40;\ 0;\ 0;\ 0;\ 80)$$

$$L^{(0)} = 1\cdot 40 + 2\cdot 40 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 80 = 120$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} - 0 = 1 \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

► В строке индексов положительная оценка, следовательно, опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

базис	$c^Б$	1	2	0	0	0	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_1	1	1	0	0	3/8	1/8	50		
x_2	2	0	1	0	-1/4	-1/4	20		
x_3	0	0	0	1	1/8	3/8	30		
		0	0	0	-1/8	-3/8	90		таблица №1

Опорный план:

$$x^{(1)} = (50;\ 20;\ 30;\ 0;\ 0;\ 0)$$

$$L^{(1)} = 1\cdot 50 + 2\cdot 20 + 0\cdot 30 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 90$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{8} \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/4 \\ 3/8 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{3}{8}$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неположительны.

Найдено решение, оптимальное с точки зрения минимизации целевой функции в имеющихся условиях:

$x_1 = 50$ (план производства изделия A, ед.)

$x_2 = 20$ (план производства изделия B, ед.)

при этом

$L(50;\ 20) = 90$ (минимально возможная загрузка оборудования 1-го типа при данных условиях, ч)

Прибыль от реализации произведённых изделий составит $50\cdot 4 + 20\cdot 6 = 320$ руб.

Ответ: 50 - план производства изделия A (ед.),
20 - план производства изделия B (ед.);
90 - загрузка оборудования 1-го типа (ч);
320 - прибыль при выполненном плане (руб.).

Графическое решение задачи.

Найдём геометрически наименьшее значение линейной функции $L(X) = x_1 + 2x_2$ в области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 240 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 320 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 2x_1 + x_2 \le 120 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 160 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

Область G допустимых решений есть пересечение полуплоскостей (в скобках - уравнения их границ):

$$x_2 \le -\frac{1}{2}x_1 + 60 \qquad \left(x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 60\right) \qquad (1)$$

$$x_2 \le -2x_1 + 120 \qquad \left(x_2 = -2x_1 + 120\right) \qquad (2)$$

$$x_2 \ge -\frac{2}{3}x_1 + \frac{160}{3} \qquad \left(x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{160}{3}\right) \qquad (3)$$

$$x_1 \ge 0 \qquad \left(x_1 = 0\right) \qquad (4)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad \left(x_2 = 0\right) \qquad (5)$$

Прямая 1:

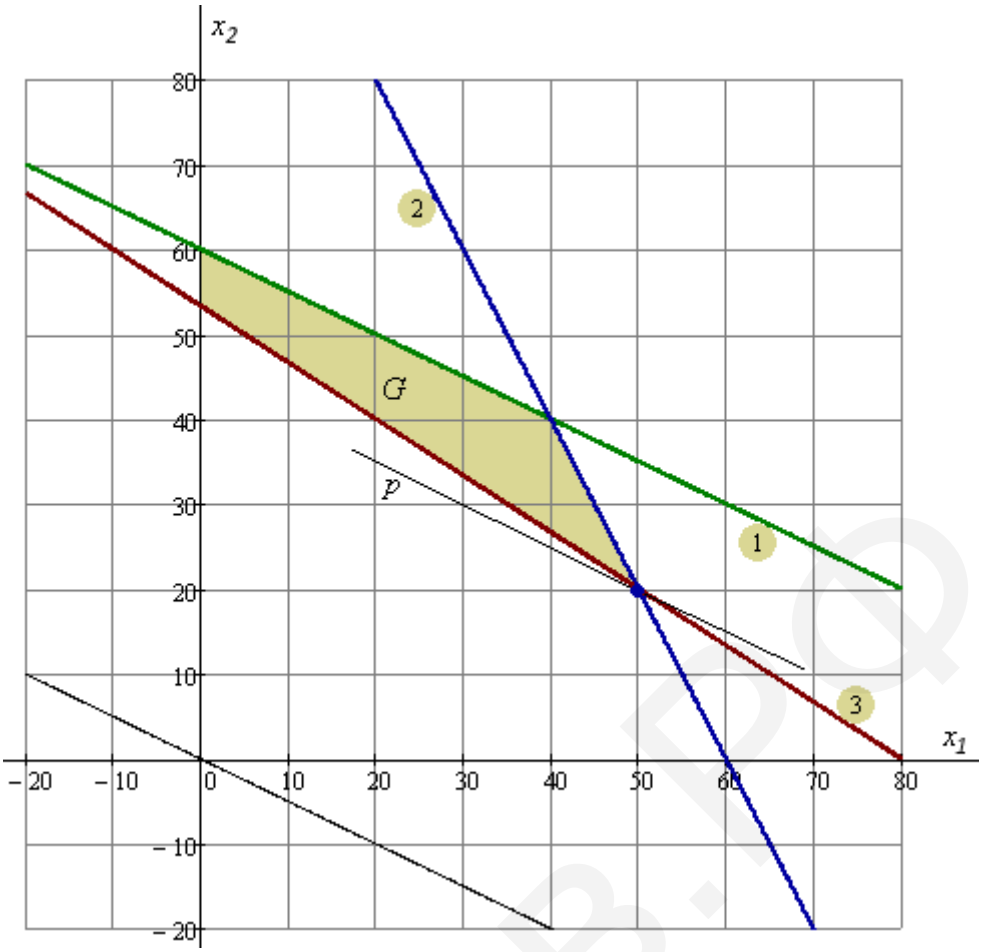
x_1	0	40
x_2	60	40

Прямая 2:

x_1	30	50
x_2	60	20

Прямая 3:

x_1	20	50
x_2	40	20



Запишем её уравнение нулевой линии уровня целевой функции $L(X) = x_1 + 2x_2$ в виде $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ и построим по точкам (тонкая линия):

x_1	0	20
x_2	0	-10

Передвигая эту прямую параллельно самой себе (по направлению $\vec{n} = \operatorname{grad} L(X) = (1;2)$), зафиксируем её крайнее положение p. Это нижняя опорная прямая для области G.

Наименьшее значение $L(x_1;x_2)$ в области G определится пересечением прямых a_2 и a_3:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 120 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{160}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

$L(50;20) = 90$ - наименьшее значение целевой функции в области G.

Ответ: 50 - план производства изделия A (ед.),
20 - план производства изделия B (ед.);
90 - загрузка оборудования 1-го типа (ч).

Решение задачи в Mathcad 14:

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1$

$L(x_1, x_2) := x_1 + 2x_2$

Given

$x_1 + 2x_2 \le 120$

$4x_1 + 2x_2 \le 240$

$4x_1 + 6x_2 \ge 320$

$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$

$y := \text{Minimize}(L, x_1, x_2)$

$y = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad L(y_0, y_1) = 90$

2) Перед проектировщиком автомобиля поставлена задача сконструировать дешёвый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу, стоимость которых соответственно составляет 25, 20, 40 р./м^2; причём масса 1 м^2 листового металла, стекла и пластмассы равна соответственно 10, 15, 3 кг. Совместная общая поверхность кузова вместе с дверями и окнами должна составлять 14 м^2; из них не менее 4 м^2 и не более 5 м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько листового металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший план ?

Построение математической модели задачи.

Задача заключается в таком распределении площади $X = \{x_1; x_2; x_3\}$ на каждый вид материала, чтобы общая стоимость материала была минимальна. Здесь x_1 (м^2) - расход металла;

x_2 (м^2) - расход стекла;

x_3 (м^2) - расход пластмассы.

Система, описывающая условия задачи, имеет вид:

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 \le 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ 4 \le x_2 \le 5 \\ x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, 3\} \end{cases}$$

$$L(X) = 25x_1 + 20x_2 + 40x_3 \quad \to \quad \min$$

Симплекс-метод решения задачи.

Симплексный метод применяется при решении задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Задачу линейного программирования будем считать приведённой к каноническому виду, если:

- система ограничений содержит только равенства;
- правые части системы ограничений неотрицательны.

► Приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 10x_1+15x_2+3x_3+x_4=150 \\ x_1+x_2+x_3=14 \\ x_2-x_5=4 \\ x_2+x_6=5 \\ x_j\ge 0,\quad j\in\{1,\dots,6\} \end{cases}$$

$$L(X)=25x_1+20x_2+40x_3+0x_4+0x_5+0x_6 \quad\to\quad \min$$

Задача не имеет начального опорного решения с базисом из единичных векторов. Применяя метод искусственного базиса, составляем расширенную задачу. В левые части уравнений системы ограничений вводим неотрицательные искусственные переменные x_7, x_8 с коэффициентом +1. Данная задача - задача на нахождение минимума, поэтому эти переменные в целевую функцию вводятся с коэффициентом +M (предполагаем $M\gg 1$):

$$\begin{cases} 10x_1+15x_2+3x_3+x_4=150 \\ x_1+x_2+x_3+x_7=14 \\ x_2-x_5+x_8=4 \\ x_2+x_6=5 \\ x_j\ge 0,\quad j\in\{1,\dots,8\} \end{cases}$$

$$L(X)=25x_1+20x_2+40x_3+Mx_7+Mx_8 \quad\to\quad \min$$

► Сведём данные в 1-й блок таблицы Гаусса (в столбце $c^Б$ стоят коэффициенты базисных переменных целевой функции):

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_4	0	10	15	3	1	0	0	0	0	150	10	
x_7	M	1	1	1	0	0	0	1	0	14	14	
x_8	M	0	**1**	0	0	-1	0	0	1	4	**4**	$\times(-15)_1(-1)_2(-1)_4$
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	5	5	
		M-25	**2M-20**	M-40	0	-M	0	0	0	18M		таблица №0

Первоначально базисными переменными являются переменные x_4, x_6, x_7, x_8 и начальное опорное решение:

$$x^{(0)}=(0;\,0;\,0;\,150;\,0;\,5;\,14;\,4)$$

$$L^{(0)}=25\cdot 0+20\cdot 0+40\cdot 0+0\cdot 150+0\cdot 0+0\cdot 5+M\cdot 14+M\cdot 4=18M$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; для этого вычислим индексы:

$$\Delta_1=\begin{pmatrix}0\\M\\M\\0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}10\\1\\0\\0\end{pmatrix}-25=M-25 \qquad \Delta_2=\begin{pmatrix}0\\M\\M\\0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}15\\1\\1\\1\end{pmatrix}-20=2M-20$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ M \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 40 = M - 40 \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ M \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

Здесь возможны три случая (если задача на **минимум** целевой функции):

- все оценки в индексной строке неположительны - значит полученный план оптимален;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней есть хотя бы один положительный коэффициент - план неоптимален, возможно его улучшение;
- среди оценок есть хотя бы одна положительная, и в столбце над ней нет ни одного положительного коэффициента - целевая функция не ограничена сверху, оптимального плана не существует.

► Поскольку в строке индексов есть положительные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану, т.е. изменим базис.

Поскольку решаемая задача - задача на минимум, то ведущий столбец α определяется по наибольшей из оценок в строке индексов и указывает, какая переменная будет вводиться в новый базис. В данном случае ведущий столбец $\alpha = 2$ и в новый базис вводится переменная x_2.

Ведущая строка β определится по наименьшей величине θ_i и указывает, какая базисная переменная выводится из базиса. В данном случае ведущая строка $\beta = 3$ ($4:1=4$) и из базиса выводится переменная x_8.

Замечания.

- Если $a_{i\alpha} \le 0$, то θ_i не вычисляется.
- При вычислении θ_i может получиться так, что минимум отношения окажется одинаковым для нескольких номеров i, т.е. сразу несколько строк таблицы могут быть разрешающими. Если выбирать ведущую строку произвольно, то это может привести к зацикливанию алгоритма симплекс-метода (вырожденный случай). Чтобы избежать этого, рекомендуется этот выбор осуществлять по определённому правилу, например: для данных строк таблицы вычисляются отношения $a_{i1}/a_{i\alpha}$, начиная по порядку с $i=1$, и находится строка, для которой это отношение является минимальным (по величине). Если такая строка единственная, то её считают разрешающей. В противном случае вычисляются следующие отношения $a_{i2}/a_{i\alpha}$ и т.д. В результате получим единственную разрешающую строку.

Переходим к новому базису и составляем для него симплекс-таблицу. Переход от одного блока таблицы к другому осуществляем элементарными преобразованиями Гаусса над строками.

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_4	0	10	0	3	1	15	0	0	-15	90	6	
x_7	M	1	0	1	0	1	0	1	-1	10	10	
x_2	20	0	1	0	0	-1	0	0	1	4		
x_6	0	0	0	0	0	**1**	1	0	-1	1	**1**	$\times(-15)_1\,(-1)_2\,(1)_3$
		M-25	0	M-40	0	**M-20**	0	0	20-2M	80+10M		таблица №1

В результате преобразований на месте ведущего столбца новой симплекс-таблицы получен единичный столбец.

Построим новый опорный план:

$$x^{(1)} = (0;\ 4;\ 0;\ 90;\ 0;\ 1;\ 10;\ 0)$$

$$L^{(1)} = 25\cdot 0 + 20\cdot 4 + 40\cdot 0 + 0\cdot 90 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + M\cdot 10 + M\cdot 0 = 80 + 10M$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 25 = M - 25 \qquad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 40 = M - 40$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = M - 20 \qquad \Delta_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - M = 20 - 2M$$

► Поскольку в строке индексов есть положительные оценки, то опорный план не оптимален. Переходим к новому опорному плану.

Сейчас ведущий столбец $\alpha = 5$, а ведущая строка $\beta = 4$ $(1:1=1)$.

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_4	0	**10**	0	3	1	0	-15	0	0	75	**7,5**	$\times\left(-\frac{1}{10}\right)_2 (0)_3 (0)_4$
x_7	M	1	0	1	0	0	-1	1	0	9	9	
x_2	20	0	1	0	0	0	1	0	0	5		
x_5	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	1		
		M-25	0	M-40	0	0	20-M	0	-M	100+9M		таблица №2

Новый опорный план:

$$x^{(2)} = (0;\ 5;\ 0;\ 75;\ 1;\ 0;\ 9;\ 0)$$

$$L^{(2)} = 25\cdot 0 + 20\cdot 5 + 40\cdot 0 + 0\cdot 75 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + M\cdot 9 + M\cdot 0 = 100 + 9M$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность; вычисляем индексы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 25 = M - 25 \qquad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 40 = M - 40$$

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 20 - M \qquad \Delta_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - M = -M$$

► В строке индексов есть положительные оценки, следовательно, опорный план неоптимален; переходим к новому опорному плану.

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_1	25	1	0	3/10	1/10	0	-3/2	0	0	7,5	25	
x_7	M	0	0	**7/10**	-1/10	0	1/2	1	0	1,5	**2**	$\times\left(-\frac{3}{7}\right)_1 (0)_3 (0)_4$
x_2	20	0	1	0	0	0	1	0	0	5		
x_5	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	1		
		0	0	**0,7M**	<0	0	0,5M	0	<0	287,5+1,5M		таблица №3

Новый опорный план:

$$x^{(3)} = (7{,}5\ ;\ 5;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1{,}5\ ;\ 0)$$

$$L^{(3)} = 25\cdot 7{,}5 + 20\cdot 5 + 40\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + M\cdot 1{,}5 + M\cdot 0 = 287{,}5 + 1{,}5M$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3/10 \\ 7/10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 40 = -\frac{65}{2} + \frac{7}{10}M \qquad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 25 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/10 \\ -1/10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}M$$

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 25 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{35}{2} + \frac{1}{2}M \qquad \Delta_8 = \begin{pmatrix} 25 \\ M \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - M = -M$$

► План неоптимален; переходим к новому опорному плану.

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_1	25	1	0	0	1/7	0	-12/7	-3/7	0	48/7		
x_3	40	0	0	1	-1/7	0	5/7	10/7	0	15/7	3	$\times(-10)_2 (0)_3 (0)_4$
x_2	20	0	1	0	0	0	1	0	0	5	5	
x_5	0	0	0	0	0	1	**1**	0	-1	1	**1**	
		0	0	0	<0	0	**40/7**	<0	<0	2500/7		таблица №4

Новый опорный план:

$$x^{(4)} = \left(\frac{48}{7}\ ;\ 5;\ \frac{15}{7}\ ;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\right)$$

$$L^{(4)} = 25\cdot\frac{48}{7} + 20\cdot 5 + 40\cdot\frac{15}{7} + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + M\cdot 0 + M\cdot 0 = \frac{2500}{7} = 357\frac{1}{7}$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -1/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 40 = -\frac{180}{7} \qquad \Delta_6 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -12/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{40}{7}$$

$$\Delta_7 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3/7 \\ 10/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M = \frac{325}{7} - M \qquad \Delta_8 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - M = -M$$

► План неоптимален; переходим к новому опорному плану.

ба-зис	$c^Б$	25	20	40	0	0	0	M	M	b_i	θ_i	комментарий
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
x_1	25	1	0	0	1/7	12/7	0	-3/7	-12/7	60/7		
x_3	40	0	0	1	-1/7	-5/7	0	10/7	5/7	10/7		
x_2	20	0	1	0	0	-1	0	0	1	4		
x_6	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	1		
		0	0	0	<0	0	<0	<0	<0	2460/7		таблица №5

$$x^{(5)} = \left(\frac{60}{7}; 4; \frac{10}{7}; 0; 0; 1; 0; 0 \right)$$

$$L^{(5)} = 25 \cdot \frac{60}{7} + 20 \cdot 4 + 40 \cdot \frac{10}{7} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + M \cdot 0 + M \cdot 0 = \frac{2460}{7} = 351\frac{3}{7}$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1/7 \\ -1/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{15}{7} \qquad \Delta_5 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 12/7 \\ -5/7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{40}{7}$$

$$\Delta_7 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3/7 \\ 10/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M = \frac{325}{7} - M \qquad \Delta_8 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -12/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - M = \frac{40}{7} - M$$

► Опорный план, составленный по последней симплекс-таблице, является оптимальным, т.к. оценки в строке индексов все неположительны. При этом заметим, и это важно, что искусственные переменные равны нулю.

Если в результате решения задачи с искусственным базисом (M -задачи):

- получено оптимальное решение, в котором все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения M -задачи путём отбрасывания всех искусственных переменных;
- получено оптимальное решение, в котором хотя бы одна из искусственных переменных не равна нулю, то исходная задача решений не имеет (ввиду несовместности системы ограничений);
- установлено, что M -задача решений не имеет, то исходная задача также решений не имеет (ввиду неограниченности целевой функции).

Итак, найдено решение, оптимальное с точки зрения минимальных затрат на материалы

$x_1 = 8\frac{4}{7}$ (планируемый расход металла, м^2);

$x_2 = 4$ (планируемый расход стекла, м^2);

$x_3 = 1\frac{3}{7}$ (планируемый расход пластмассы, м^2);

при этом

$L(X) = 351\frac{3}{7}$ (минимально возможная стоимость материалов для одного автомобиля, р.)

Решение задачи в Mathcad.

Можно получить сразу готовое решение, чтобы убедиться в правильности проделанных вручную вычислений.

Решение задачи в Mathcad 14:

$$ORIGIN := 1$$

$$c := \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L(x) := c \cdot x$$

Given

$$10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \le 150$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14$$

$$4 \le x_2 \le 5$$

$$x \ge 0$$

$$y := \text{Minimize}(L, x) \qquad y = \begin{pmatrix} 8\frac{4}{7} \\ 4 \\ 1\frac{3}{7} \end{pmatrix} \qquad L(y) = 351\frac{3}{7}$$

Но можно избавить себя от большей части рутинных вычислений и легко получить все промежуточные таблицы Гаусса. Вручную записывается только исходная матрица A; все последующие вычисляются автоматически - вам необходимо только правильно указывать разрешающий элемент для очередного преобразования. Для этого на каждом шаге вычисляем вручную лишь величины θ_i. Преобразование Жордана-Гаусса выполняется подпрограммой $JG(M, a, b)$.

$$ORIGIN := 1$$

$$JG(M, a, b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(M) \\ \quad \text{for } j \in 1..\text{cols}(M) \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} N_{i,j} \leftarrow \dfrac{M_{i,j}}{M_{a,b}} \ \text{ if } i = a \\ N_{i,j} \leftarrow M_{i,j} - \dfrac{M_{i,b} \cdot M_{a,j}}{M_{a,b}} \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ N \end{array} \right.$$

функция, выполняющая преобразование Жордана-Гаусса относительно указанного элемента (a,b) матрицы M.
(a - номер строки, считая с 1;
b - номер столбца, считая с 1)

0) $$A := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ M-25 & 2M-20 & M-40 & 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 18M \end{pmatrix}$$

1) $$A := JG(A,3,2) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & 1 & 15 & 0 & 0 & -15 & 90 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ M-25 & 0 & M-40 & 0 & M-20 & 0 & 0 & 20-2\cdot M & 10\cdot M+80 \end{pmatrix}$$

2) $$A := JG(A,4,5) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & 1 & 0 & -15 & 0 & 0 & 75 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ M-25 & 0 & M-40 & 0 & 0 & 20-M & 0 & -M & 9\cdot M+100 \end{pmatrix}$$

3) $$A := JG(A,1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7\cdot M}{10}-\frac{65}{2} & \frac{5}{2}-\frac{M}{10} & 0 & \frac{M}{2}-\frac{35}{2} & 0 & -M & \frac{3\cdot M}{2}+\frac{575}{2} \end{pmatrix}$$

4) $$A := JG(A,2,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & -\frac{12}{7} & -\frac{3}{7} & 0 & \frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{7} & 0 & \frac{40}{7} & \frac{325}{7}-M & -M & \frac{2500}{7} \end{pmatrix}$$

5) $$A := JG(A,4,6) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{12}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{60}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & \frac{10}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{7} & -\frac{40}{7} & 0 & \frac{325}{7}-M & \frac{40}{7}-M & \frac{2460}{7} \end{pmatrix}$$

Литература:

1) Тюлюкин В.А. “Исследование операций”, методичка УрГЭУ (Екатеринбург), 2002, стр. 21;
2) Ермаков В.И. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр. 551;
3) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006, стр. 81;
4) Охорзин В.А. "Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad 12", 2005, стр. 19.