

1) Пусть дано линейное многообразие $L = a + U$,

$$\text{где } U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \text{ и } \begin{cases} a = (8, -6, 4, 5, -1), \\ b_1 = (8, 5, -7, 1, 6), \\ b_2 = (1, -9, 3, 7, 2), \\ b_3 = (2, -1, -5, -8, -1). \end{cases} \quad \text{и векторы } \begin{cases} d_1 = (-7, -14, 10, 6, -4), \\ d_2 = (-15, -19, 17, 5, -10), \\ d_3 = (15, 19, -17, -5, 10). \end{cases}$$

Найти систему линейных уравнений, задающую L , и определить, принадлежат ли ему данные векторы.

Пусть U - подпространство линейного пространства V , а $a \in V$ - некоторый вектор. Множество векторов $L \in V$, представимых в виде $L = a + b$, где $b \in U$, называется **линейным многообразием, проходящим через вектор a параллельно подпространству U** , и обозначается

$$a + U = \{ a + b : b \in U \}.$$

Говорят также, что линейное многообразие получено параллельным сдвигом подпространства U на вектор a , а подпространство U называют **однородной частью** линейного многообразия $a + U$. [1, стр. 419]

Здесь b - любой вектор подпространства U ,

b_1, b_2, b_3 - базис подпространства U .

Существует два способа описания подпространств: **внутренний** и **внешний**. При внутреннем способе используется понятие линейной оболочки векторов, когда все элементы подпространства выражаются через некоторые его элементы (образующие). При внешнем способе применяются однородные системы уравнений. В этом случае подпространство описывается как пересечение некоторых содержащих его множеств.

Внутреннее описание **линейных многообразий** производится при помощи аффинных оболочек векторов. Внешнее описание линейных многообразий задаётся неоднородной системой линейных уравнений.

Так что в данной задаче необходимо осуществить **переход** от внутреннего описания линейного многообразия к внешнему.

Зададим линейное многообразие L в форме $a + \text{Lin}(b_1 - a, b_2 - a, b_3 - a)$,

$$b_1 = a + e_1$$

где $b_2 = a + e_2$, а e_1, e_2, e_3 - базис подпространства U .

$$b_3 = a + e_3$$

(используем свойство 3 линейных многообразий [1, стр. 420] - любое r -мерное линейное многообразие можно представить как аффинную оболочку не более, чем $r + 1$ векторов:

$$a + U = \text{Aff}(a, b_1, b_2, b_3) = a + \text{Lin}(b_1 - a, b_2 - a, b_3 - a)$$

► Из данных векторов составим матрицу

$$A = (b_1 - a, b_2 - a, b_3 - a) = \begin{pmatrix} 8-8 & 1-8 & 2-8 \\ 5-(-6) & -9-(-6) & -1-(-6) \\ -7-4 & 3-4 & -5-4 \\ 1-5 & 7-5 & -8-5 \\ 6-(-1) & 2-(-1) & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 11 & -3 & 5 \\ -11 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & -13 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

► Составим блочную матрицу $(A | E)$. Элементарными преобразованиями над строками блочной матрицы и над её первыми тремя столбцами приведём левый блок к простейшему виду $(\Lambda | S)$:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & -7 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -1 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 11 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -8/11 & 57/44 & 53/44 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7/4 & -7/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{array} \right)$$

В левом блоке получен простейший вид Λ матрицы A (её ранг $r = \text{rg } A = 3$):

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Правый блок матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} -8/11 & 57/44 & 53/44 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1 & -7/4 & -7/4 & 0 & 0 \\ -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix}$$

► Из последних $n - r = 5 - 3 = 2$ строк матрицы S составляем матрицу Ψ (кстати, достаточно было привести левый блок матрицы $(A|E)$ к верхнему треугольному виду, от этого бы матрица Ψ не изменилась)

$$\Psi = \begin{pmatrix} -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix}$$

Привести левый блок к простейшему виду можно в Mathcad 14, используя встроенную функцию `rref` :

$$AE := \begin{pmatrix} 0 & -7 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -1 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rref}(AE) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{27}{104} & -\frac{31}{104} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{63}{104} & \frac{107}{104} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{61}{8} & -\frac{597}{104} & \frac{905}{104} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} & -\frac{89}{26} & \frac{133}{26} \end{pmatrix}$$

Из последних $n - r = 5 - 3 = 2$ строк матрицы S составляем матрицу

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 61/8 & -597/104 & 905/104 \\ 0 & 1 & 11/2 & -89/26 & 133/26 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Psi = \begin{pmatrix} 104 & 0 & 793 & -597 & 905 \\ 0 & 26 & 143 & -89 & 133 \end{pmatrix}.$$

Решения, полученное вручную и полученное в Mathcad, различаются. Таких различных решений существует бесконечное множество. В общем случае, решение поставленной задачи неоднозначно, так как существует много однородных систем, имеющих одно и то же множество решений.

Столбцы $b_1 - a$, $b_2 - a$, $b_3 - a$ являются решениями полученных систем, что легко проверить их подстановкой в уравнение вместо x , или, в матричном виде:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 11 & -3 & 5 \\ -11 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & -13 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi_1 := \begin{pmatrix} 104 & 0 & 793 & -597 & 905 \\ 0 & 26 & 143 & -89 & 133 \end{pmatrix} \quad \psi_1 \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1 := \begin{pmatrix} -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix} \quad \psi_1 \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Записываем искомую систему уравнений в форме $\Psi \cdot x = \Psi \cdot a$:

$$\begin{pmatrix} -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -532x_1 + 905x_2 + 921x_3 - 44x_4 = -532 \cdot 8 + 905 \cdot (-6) + 921 \cdot 4 - 44 \cdot 5 \\ -356x_1 + 597x_2 + 569x_3 - 44x_5 = -356 \cdot 8 + 597 \cdot (-6) + 569 \cdot 4 - 44 \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -532x_1 + 905x_2 + 921x_3 - 44x_4 = -6222 \\ -356x_1 + 597x_2 + 569x_3 - 44x_5 = -4110 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 532x_1 - 905x_2 - 921x_3 + 44x_4 = 6222 \\ 356x_1 - 597x_2 - 569x_3 + 44x_5 = 4110 \end{cases}$$

- система линейных уравнений, задающая линейное многообразие L .

► Проверим принадлежность векторов d_1, d_2, d_3 данному линейному многообразию L , располагая системой линейных неоднородных уравнений, его описывающей.

$$\begin{cases} 532 \cdot (-7) - 905 \cdot (-14) - 921 \cdot 10 + 44 \cdot 6 + 0 \cdot (-4) = 0 \quad (\neq 6222) \\ 356 \cdot (-7) - 597 \cdot (-14) - 569 \cdot 10 + 0 \cdot 6 + 44 \cdot (-4) = 0 \quad (\neq 4110) \end{cases}$$

- следовательно, $d_1 \notin L$;

$$\begin{cases} 532 \cdot (-15) - 905 \cdot (-19) - 921 \cdot 17 + 44 \cdot 5 + 0 \cdot (-10) = -6222 \quad (\neq 6222) \\ 356 \cdot (-15) - 597 \cdot (-19) - 569 \cdot 17 + 0 \cdot 5 + 44 \cdot (-10) = -4110 \quad (\neq 4110) \end{cases}$$

- следовательно, $d_2 \notin L$;

$$\begin{cases} 532 \cdot 15 - 905 \cdot 19 - 921 \cdot (-17) + 44 \cdot (-5) + 0 \cdot 10 = 6222 \\ 356 \cdot 15 - 597 \cdot 19 - 569 \cdot (-17) + 0 \cdot (-5) + 44 \cdot 10 = 4110 \end{cases}$$

- следовательно, $d_3 \in L$.

Эта же проверка в Mathcad 14:

$$D := \begin{pmatrix} -7 & -15 & 15 \\ -14 & -19 & 19 \\ 10 & 17 & -17 \\ 6 & 5 & -5 \\ -4 & -10 & 10 \end{pmatrix} \quad \Psi := \begin{pmatrix} -532 & 905 & 921 & -44 & 0 \\ -356 & 597 & 569 & 0 & -44 \end{pmatrix}$$

$$\Psi \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 6222 & -6222 \\ 0 & 4110 & -4110 \end{pmatrix}$$

Убедиться в правильности найденного решения можно подстановкой координат векторов a, b_1, b_2, b_3 , образующих линейное многообразие, в найденную систему уравнений:

$$\psi := \begin{pmatrix} 104 & 0 & 793 & -597 & 905 \\ 0 & 26 & 143 & -89 & 133 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_1 := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi \cdot a \rightarrow \begin{pmatrix} 114 \\ -162 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 114 \\ -162 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 114 \\ -162 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 114 \\ -162 \end{pmatrix}$$

$$\psi := \begin{pmatrix} 532 & -905 & -921 & 44 & 0 \\ 356 & -597 & -569 & 0 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\psi \cdot a \rightarrow \begin{pmatrix} 6222 \\ 4110 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 6222 \\ 4110 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 6222 \\ 4110 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot b_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 6222 \\ 4110 \end{pmatrix}$$

или

$$AB := \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 & 2 \\ -6 & 5 & -9 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & 7 & -8 \\ -1 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \psi := \begin{pmatrix} 104 & 0 & 793 & -597 & 905 \\ 0 & 26 & 143 & -89 & 133 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot AB \rightarrow \begin{pmatrix} 114 & 114 & 114 & 114 \\ -162 & -162 & -162 & -162 \end{pmatrix}$$

$$\psi := \begin{pmatrix} 532 & -905 & -921 & 44 & 0 \\ 356 & -597 & -569 & 0 & 44 \end{pmatrix} \quad \psi \cdot AB \rightarrow \begin{pmatrix} 6222 & 6222 & 6222 & 6222 \\ 4110 & 4110 & 4110 & 4110 \end{pmatrix}$$

Литература:

1) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 422 (алгоритм получения системы линейных уравнений, задающей линейное многообразие), стр. 423 (пример 8.14).