1) Определить собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ненулевой вектор $\vec{p}$ называется собственным вектором квадратной матрицы A, если линейное преобразование с матрицей A переводит вектор $\vec{p}$ в коллинеарный ему вектор $\lambda \cdot \vec{p}$. Число λ называется собственным числом (характеристическим числом, собственным значением) матрицы A, соответствующим собственному вектору $\vec{p}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 8 & -2 \\ 5 & 2-\lambda & 8 \\ 3 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda \cdot (\lambda+6) \cdot (\lambda-3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}\right] \text{ - собственные значения матрицы } A$$

► При $\lambda_1 = -6$ имеем систему $(A+6E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -6-(-6) & 8 & -2 \\ 5 & 2-(-6) & 8 \\ 3 & -4 & 1-(-6) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 5 & 8 & 8 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 5 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 44 & -11 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть свободная переменная - x_3, тогда решение запишем в виде

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приняв $x_3 = 4c_1 \in R \setminus \{0\}$ запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -6$:

$$V_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1 \in R \setminus \{0\}.$$

► При $\lambda_2 = 0$ имеем систему $(A-0E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -6-0 & 8 & -2 \\ 5 & 2-0 & 8 \\ 3 & -4 & 1-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 26 & 19 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 39 & 0 & 51 \\ 0 & 26 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & 0 & 17 \\ 0 & 26 & 19 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} 13x_1 + 17x_3 = 0 \\ 26x_2 + 19x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть свободная переменная - x_3, тогда решение запишем в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{13}x_3 \\ -\frac{19}{26}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -17/13 \\ -19/26 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приняв $x_3 = -26c_2 \in R \setminus \{0\}$ запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_1 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 0$:

$$V_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ -26 \end{pmatrix}, \text{ где } c_2 \in R \setminus \{0\}.$$

► При $\lambda_3 = 3$ имеем систему $(A-3E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -6-3 & 8 & -2 \\ 5 & 2-3 & 8 \\ 3 & -4 & 1-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 5 & -1 & 8 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 8 \\ 9 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 17 & 34 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть свободная переменная - x_2, тогда решение запишем в виде

$$X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Приняв $x_2 = 2c_3 \in R\setminus\{0\}$ запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$V_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ где } c_3 \in R\setminus\{0\}.$$

► Итак, матрица A имеет собственные векторы

$$V_1(\lambda_1 = -6) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V_2(\lambda_2 = 0) = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 19 \\ -26 \end{pmatrix}, \quad V_3(\lambda_3 = 3) = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

где $c_i \in R\setminus\{0\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$.

Проверим правильность полученных результатов, используя определение собственного вектора.

Для $\lambda = -6 : A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} -8c_1 \\ c_1 \\ 4c_1 \end{pmatrix}, A \cdot V_1 = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8c_1 \\ c_1 \\ 4c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48c_1 \\ 6c_1 \\ 24c_1 \end{pmatrix} = -6 \cdot V_1.$

Для $\lambda = 0 : A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 34c_2 \\ 19c_2 \\ -26c_2 \end{pmatrix}, A \cdot V_2 = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34c_2 \\ 19c_2 \\ -26c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0c_2 \\ 0c_2 \\ 0c_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot V_2.$

Для $\lambda = 3 : A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2c_3 \\ 2c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}, A \cdot V_3 = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2c_3 \\ 2c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c_3 \\ 6c_3 \\ -3c_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot V_3.$

Вычисления в Mathematica 7:

$$\mathbf{Eigensystem}\left[\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right] \mathbf{// MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ \{-8, 1, 4\} & \{-2, -2, 1\} & \{-34, -19, 26\} \end{pmatrix}$$

Вычисления в Maxima 5:

```
(%i6) load ("eigen")$ matrix([-6,8,-2], [5,2,8], [3,-4,1]); eivects(%);
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\%o8) \quad [[[3, -6, 0], [1, 1, 1]], [1, 1, -\frac{1}{2}], [1, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}], [1, \frac{19}{34}, -\frac{13}{17}]]$$

(собственные значения, их кратность, собственные векторы)

Вычисления в Sage 3:

```
A=maxima("matrix([-6,8,-2], [5,2,8], [3,-4,1])")
A.eigenvectors()
```

```
[[[3,-6,0],[1,1,1]],[1,1,-1/2],[1,-1/8,-1/2],[1,19/34,-13/17]]
```

Литература:

1) Кремер Н.Ш. "Высшая математика для экономических специальностей", 2006, стр. 28;
2) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 286 (пример 7.8);
3) Гурский Д.А., Турбина Е.С. “Вычисления в Mathcad 12”, 2006, стр. 129;
4) Макаров Е.Г. “Инженерные расчёты в Mathcad 14”, 2007, стр. 118;
5) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9”, 2006, стр. 67.

2) Найти характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = 0$ - характеристический многочлен линейного оператора

$(\lambda-2)^4 = 0$

$\lambda_{1,2,3,4} = 2$ - собственные значения матрицы A

► При $\lambda_{1,2,3,4} = 2$ имеем систему $(A-2E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Пусть свободные переменные - x_2 и x_4, тогда решение системы запишем в виде

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_4-x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приняв свободные переменные $\begin{cases} x_2=c_1\in R \\ x_4=c_2\in R \\ c_1\cdot c_2\neq 0 \end{cases}$,

запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X=c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2,3,4}=2$:

$$V_1=c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad V_2=c_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{где } \{c_1, c_2\}\subset R\setminus\{0\}.$$

Проверим правильность полученных результатов, воспользовавшись определением собственного вектора.

Для $\lambda_{1,2,3,4}=2: A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ V_1=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\cdot V_1=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_1 \\ -2c_1 \\ 0 \end{pmatrix}=2\cdot V_1;$

$$V_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix},\ A\cdot V_2=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}=2\cdot V_2.$$

Вычисления в Mathematica 7:

$$\mathbf{Eigensystem}\left[\mathbf{m}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right]\ \mathbf{//\ MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \{1, 1, 0, 1\} & \{-1, -1, 1, 0\} & \{0, 0, 0, 0\} & \{0, 0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

(в такой форме получим собственные векторы если свободными переменными примем x_3 и x_4)

3) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора (матрицы A). Привести матрицу A к диагональному виду (если возможно).

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(3-\lambda)\cdot(1-\lambda)^2=0$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1=\lambda_2=1 \\ \lambda_3=3 \end{matrix}\right] \text{ - собственные значения матрицы } A$$

► При $\lambda_{1,2}=1$ имеем систему $(A-E)x=0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\{ x_1-x_2=0$$

Пусть свободные переменные x_2 и x_3, тогда решение запишем в виде

$$X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приняв свободные переменные $\begin{cases} x_2=c_1\in R\setminus\{0\} \\ x_3=c_2\in R\setminus\{0\} \end{cases}$,

запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_1=c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям $\lambda_{1,2}=1$:

$$V_1=c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad V_2=c_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\text{ где } c_1\in R\setminus\{0\} \text{ и } c_2\in R\setminus\{0\}.$$

► При $\lambda_3=3$ имеем систему $(A-3E)x=0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Пусть свободная переменная - x_3, тогда решение запишем в виде

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Приняв свободную переменную $x_3 = c_3 \in R \setminus \{0\}$ получаем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_2 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$V_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } c_3 \in R \setminus \{0\}.$$

► Итак, линейный оператор A имеет три собственных вектора:

$$V_1(\lambda_1 = 1) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(\lambda_2 = 1) = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3(\lambda_3 = 3) = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где $c_i \in R \setminus \{0\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$.

Во всех задачах нахождения собственных векторов получается вырожденная система уравнений относительно координат векторов, т.е. часть уравнений в системе $(A - \lambda E)X^* = 0$ после подстановки собственных значений становятся одинаковыми. Это означает, что число отличных друг от друга уравнений будет меньше, чем неизвестных, и часть неизвестных всегда будут свободными, и, следовательно, система будет иметь бесконечное множество решений. Это возникает из-за того, что мы находим собственные значения из условия равенства нулю определителя системы, а приравнивая определитель нулю, мы делаем систему уравнений линейно зависимой, а это и означает, что часть уравнений системы могут быть выражены через другие уравнения системы. Таким образом, собственные векторы определяются с точностью до постоянной, т.е. каждому собственному значению соответствует бесконечное множество коллинеарных друг другу собственных векторов.

Проверим правильность полученных результатов, воспользовавшись определением собственного вектора.

Для $\lambda_{1,2} = 1: A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot V_1;$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}, A \cdot V_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot V_2.$$

Для $\lambda_3 = 3: A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}, A \cdot V_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_3 \\ -3c_3 \\ 3c_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot V_3.$

► Привести матрицу A к диагональному виду.

1-й способ решения.

Ранее найдены ФСР систем уравнений $\left(A-\lambda_i E\right)x=0$:

$$f_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

из которых составляется невырожденная матрица

$$T=\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Матрица T, составленная из столбцов фундаментальных решений, квадратная, поэтому матрица A приводится к диагональному виду

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

2-й способ решения.

Заметим, что в данном случае у матрицы A геометрическая кратность каждого собственного значения λ_i совпадает с его алгебраической кратностью, благодаря чему в пространстве R^3 имеется базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

Зная собственные значения матрицы A, запишем приведение её к диагональному виду:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(такую матрицу имеет линейный оператор A в базисе, состоящем из собственных векторов).

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 286 (пример 7.8), стр. 293 (пример 7.9);
2) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 190...192, стр. 203 (пример 5.9);
3) Малугин В.А. "Линейная алгебра (математика для экономистов): курс лекций", 2006, стр. 68 (фундаментальные решения), стр. 71 (пример);
4) Малугин В.А. "Линейная алгебра (математика для экономистов): задачи и упражнения", 2006, стр. 43 (пример 4);
5) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 1, 2003, стр. 121;
6) Ермаков В.И. "Сборник задач по высшей математике для экономистов", 2007, стр. 108;
7) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 96.