1) Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис линейного подпространства, порождённого системой векторов

$$\vec{a} = (3;\,-1;\,-1;\,0)$$
$$\vec{b} = (2;\,-1;\,0;\,1) \quad .$$
$$\vec{c} = (1;\,1;\,-2;\,3)$$

Процесс ортогонализации заключается в последовательном переборе m векторов системы (в любом порядке и начиная с любого вектора системы) с таким одновременным поворотом каждого вектора системы, чтобы каждый текущий вектор стал перпендикулярен предыдущему. Процесс ортогонализации детально изложен и обоснован, в частности, в [1]; он занимает m шагов. В [2] он называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Замечания:

- ортогонализируемая система векторов должна быть линейно независима; если же исходная система векторов линейно зависима, то среди векторов ортогональной системы будут нулевые, которые удалим из системы;
- если линейно независимая система ортогональна, то ортогонализация не изменит её;
- поскольку порядок перебора векторов в процессе ортогонализации произволен, то задача ортогонализации, решаемая в соответствии с рассмотренным алгоритмом, имеет $P_m = m!$ решений.

► Проверим линейную независимость данных векторов (это можно и не делать, но выявив и удалив линейно зависимые векторы, избежим в дальнейшем лишних вычислений). Для этого найдём ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ранг матрицы равен трём (количеству векторов), следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы. Пары векторов определяют непараллельные гиперплоскости (векторы в данной задаче определены в пространстве R^4).

Проверим ортогональность векторов, вычислив скалярные произведения:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \neq 0 \qquad \vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \qquad \vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

- векторы не являются взаимно ортогональными.

► Положим $\vec{g}_1 = \vec{a} = (3;\,-1;\,-1;\,0)$.

► Теперь $\vec{g}_2 = \vec{b} - \left(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\right)\cdot\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{7}{11}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -4/11 \\ 7/11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{g}_1\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \qquad \vec{g}_1\cdot\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 11$$

► Далее $\vec{g}_3 = \vec{c} - \left(\frac{\vec{c}\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\right)\cdot\vec{g}_1 - \left(\frac{\vec{c}\cdot\vec{g}_2}{\vec{g}_2\cdot\vec{g}_2}\right)\cdot\vec{g}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} - \frac{4}{11}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{16}{17}\cdot\begin{pmatrix}1/11\\-4/11\\7/11\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/17\\29/17\\-38/17\\35/17\end{pmatrix}$.

$$\vec{g}_1\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = 4 \qquad \vec{g}_2\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}1/11\\-4/11\\7/11\\1\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix} = \frac{16}{11} \qquad \vec{g}_2\cdot\vec{g}_2 = \begin{pmatrix}1/11\\-4/11\\7/11\\1\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}1/11\\-4/11\\7/11\\1\end{pmatrix} = \frac{17}{11}$$

► Пронормировав векторы $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$, получим искомый ортонормированный базис:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\left|\vec{g}_1\right|} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}; 0\right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\left|\vec{g}_2\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{187}}; -\frac{4}{\sqrt{187}}; \frac{7}{\sqrt{187}}; \frac{11}{\sqrt{187}}\right)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\left|\vec{g}_3\right|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{391}}; \frac{29}{3\sqrt{391}}; -\frac{38}{3\sqrt{391}}; \frac{35}{3\sqrt{391}}\right)$$

Проверка в Mathcad:

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 := \frac{1}{\sqrt{187}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\7\\11\end{pmatrix} \qquad e_3 := \frac{1}{3\cdot\sqrt{391}}\cdot\begin{pmatrix}-3\\29\\-38\\35\end{pmatrix}$$

$e_1\cdot e_2 \rightarrow 0$ $\qquad \sqrt{e_1\cdot e_1} \rightarrow 1$

$e_2\cdot e_3 \rightarrow 0$ $\qquad \sqrt{e_2\cdot e_2} \rightarrow 1$

$e_1\cdot e_3 \rightarrow 0$ $\qquad \sqrt{e_3\cdot e_3} \rightarrow 1$

Примечание. Поскольку в процессе ортогонализации в качестве очередного поворачиваемого вектора и в качестве вектора, относительно которого производится поворот, можно брать произвольные пары векторов, то задача, решаемая в соответствии с рассмотренным алгоритмом, имеет $P_3 = 3! = 6$ решений. Если же рассматривать все ортонормированные базисы, а не только полученные процессом ортогонализации, то таких базисов существует бесконечное количество.

Литература:

1) Ермаков В.И. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр.52 (ортогонализация системы векторов), стр. 127 (гиперплоскость);
2) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 434 (процесс ортогонализации Грама-Шмидта);
3) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 272, стр. 277 (примеры 8.5, 8.6).

2) Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов

$$a_1 = (1;\ 2;\ 2;\ -1)$$

$$a_2 = (1;\ 1;\ -5;\ 3)\ .$$

$$a_3 = (3;\ 2;\ 8;\ -7)$$

В качестве первого вектора возьмём $b_1 = a_1$.

Остальные векторы вычислим по формуле

$$b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Тогда

$\{b_1, \dots, b_n\}$ - ортогональный базис,

$\left\{\frac{b_1}{\|b_1\|}, \dots, \frac{b_n}{\|b_n\|}\right\}$ - ортонормированный базис.

Пусть $b_1 = a_1$; т.е. $b_1 = (1;\ 2;\ 2;\ -1)$.

Второй вектор ортогонального базиса:

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = (1;\ 1;\ -5;\ 3) - \frac{(1+2-10-3)}{(1+4+4+1)}(1;\ 2;\ 2;\ -1) = (2;\ 3;\ -3;\ 2)$$

Третий вектор ортогонального базиса:

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 =$$

$$= (3;\ 2;\ 8;\ -7) - \frac{(3+4+16+7)}{(1+4+4+1)}(1;\ 2;\ 2;\ -1) - \frac{(6+6-24-14)}{(4+9+9+4)}(2;\ 3;\ -3;\ 2) =$$

$$= (2;\ -1;\ -1;\ -2)$$

Итак, искомый ортогональный базис $\{b_1, b_2, b_3\}$:

$$b_1 = (1;\ 2;\ 2;\ -1)$$

$$b_2 = (2;\ 3;\ -3;\ 2)$$

$$b_3 = (2;\ -1;\ -1;\ -2)$$