1) Даны линейные подпространства U и W, порождённые системами векторов:

$$a_1=(2;-1;3;2)$$

$$a_2=(2;2;-2;-1)$$

$$a_3=(2;2;1;-2)$$

и

$$b_1=(-1;2;-2;1)$$

$$b_2=(3;3;2;-2)$$

Найти базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$.

а) Базис подпространства $U+W$.

Множество всех векторов x вида $x=a+b$, где $a\in U$, $b\in W$, называют **суммой подпространств** U и W и обозначают как $U+W$. Если при этом пересечение $U\cap W$ - нулевое подпространство, то сумму $U+W$ называют **прямой суммой** и обозначают как $U\oplus W$. Если сумма $U+W$ подпространств U и W в X является прямой, то представление любого вектора x в виде $x=a+b$, где $a\in U$, $b\in W$, единственно.

Составим матрицу $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Используя элементарные преобразования, приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 7 \end{pmatrix}$$

Вычисление в Mathcad 14:

$$A:=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\qquad \mathrm{rref}(A)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{37}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

Видим, что ранг матрицы равен 4, а один из её базисных миноров располагается на векторах $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1$. Следовательно, эти векторы могут составлять базис суммы подпространств $U+W$ и

$$U+W=L(a_1,a_2,a_3,b_1)$$

$$\dim(U+W)=4$$

Итак, базис $U+W$:

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. “Линейная алгебра в примерах и задачах”, 2005, стр. 411 (пример 8.11), стр. 413 (пример 8.12), стр. 416 (пример 8.13);
2) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 148 (пример 4.22);
3) Тыртышников Е.Е. "Матричный анализ и линейная алгебра", 2007, стр. 114, 123.

б) Базис подпространства $U\cap W$.

Пусть в линейном пространстве X даны подпространства U и W. Множество $U\cap W$ векторов, принадлежащих как U, так и W, является подпространством в X. Его называют **пересечением подпространств** U и W.

Если пространства U и W заданы однородными системами уравнений, то пересечение $U\cap W$ будет определяться системой, получаемой объединением всех уравнений двух систем. Любая фундаментальная система решений такой системы уравнений даёт базис пересечения $U\cap W$.

1-й способ решения, "параметрический" вариант ([2], пример 4.24)

Подпространства U и W заданы как линейные оболочки систем векторов. Перейдём к описанию этих подпространств общими уравнениями.

Подпространство U описывается параметрическим уравнением $x=t_1\cdot a_1+t_2\cdot a_2+t_3\cdot a_3$, которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases}x_1=2t_1+2t_2+2t_3\\x_2=-t_1+2t_2+2t_3\\x_3=3t_1-2t_2+t_3\\x_4=2t_1-t_2-2t_3\end{cases}$$

Чтобы исключить из системы параметры t_1, t_2, t_3, решаем однородную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 9 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/18 \\ 0 & 1 & 0 & -14/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Общее решение запишем в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{18}\lambda_4 \\ \frac{14}{9}\lambda_4 \\ \frac{1}{3}\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} -13/18 \\ 14/9 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_4}{18} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Так что ФСР (фундаментальная система решений) системы, она же - фундаментальная матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} -13 \\ 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Исключив параметры t_1, t_2, t_3, приходим к общему уравнению подпространства U:

$$-13x_1 + 28x_2 + 6x_3 + 18x_4 = 0$$

Подпространство W описывается параметрическим уравнением $x = t_1 \cdot b_1 + t_2 \cdot b_2$, которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 + 3t_2 \\ x_2 = 2t_1 + 3t_2 \\ x_3 = -2t_1 + 2t_2 \\ x_4 = t_1 - 2t_2 \end{cases}$$

Чтобы исключить из системы параметры t_1, t_2, решаем однородную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение запишем в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Система имеет два фундаментальных решения, и фундаментальную матрицу можно записать в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Исключив параметры t_1, t_2, придём к общему уравнению подпространства W:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения подпространства $U \cap W$ имеют вид:

$$\begin{cases} -13x_1 + 28x_2 + 6x_3 + 18x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

- базис подпространства $U \cap W$ (внешний способ описания)

Найдём фундаментальную систему решений этой системы. Записав матрицу системы, приводим её элементарными преобразованиями к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -13 & 28 & 6 & 18 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -13 & 28 & 6 & 18 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 0 & 171 & 192 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 114 & 0 & 0 & 164 \\ 0 & 3192 & 0 & 3416 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 57 & 0 & 0 & 82 \\ 0 & 57 & 0 & 61 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix}$$

Решение запишем в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{82}{57}x_4 \\ -\frac{61}{57} \cdot x_4 \\ -\frac{64}{57} \cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -82/57 \\ -61/57 \\ -64/57 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{x_4}{57} \cdot \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}$$

Итак, ФСР системы составляет, например, вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}$.

Этот вектор и образует базис в подпространстве $U \cap W$.

Проверим размерность пересечения подпространств, используя формулу Грассмана:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix} \right\}$ - базис подпространства $U \cap W$ (внутренний способ описания)

2-й способ, "матричный" вариант

Подпространства U и W заданы как линейные оболочки систем векторов [2]. Перейдём к описанию этих подпространств общими уравнениями.

► Составим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ и блочную матрицу $(A \mid E)$:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

► Элементарными преобразованиями над строками блочной матрицы и над её первыми трёмя столбцами приведём левый блок к простейшему виду $(\Lambda \mid S)$. Для ускорения вычислений получим результат в Mathcad (используем функцию rref):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{8}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{28}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{18}{13} \end{pmatrix}$$

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 13 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 8 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -28 & -6 & -18 \end{array} \right)$$

Отметим, что ранг матрицы A: $r(A) = 3$.

► Из последних $n-r=4-3=1$ строк матрицы S составляем матрицу Ψ_1 однородной системы уравнений, описывающей подпространство U:

$$\Psi_1=\begin{pmatrix} 13 & -28 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

► Запишем систему уравнений $\Psi_1 \cdot X=0$:

$$\begin{pmatrix} 13 & -28 & -6 & -18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\ 13x_1-28x_2-6x_3-18x_4=0$$

Проверку правильности полученной системы производим подстановкой в неё координат векторов a_1, a_2, a_3:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \psi_1 := (13\ \ -28\ \ -6\ \ -18) \qquad \psi_1 \cdot A \rightarrow (0\ \ 0\ \ 0)$$

► Составим матрицу $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ и блочную матрицу $(B\,|\,E)$:

$$(B\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cccc} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

► Элементарными преобразованиями над строками блочной матрицы и над её первыми трёмя столбцами приведём левый блок к простейшему виду $(\Lambda\,|\,S)$. Для ускорения вычислений получим результат в Mathcad (используем функцию rref):

$$BE := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(BE) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$(B\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cccc} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

Отметим, что ранг матрицы B: $r(B)=2$.

► Из последних $n-r=4-2=2$ строк матрицы S составляем матрицу Ψ_2 однородной системы уравнений, описывающей подпространство U:

$$\Psi_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

► Запишем систему уравнений $\Psi_2 \cdot X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Проверку правильности полученной системы производим подстановкой в неё координат векторов b_1, b_2:

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 \cdot B \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Пересечение $U \cap W$ описывается однородной системой

$$\begin{cases} 13x_1 - 28x_2 - 6x_3 - 18x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$ - базис подпространства $U \cap W$ (внешний способ описания)

Найдём базис пересечения - фундаментальную систему решений этой однородной системы уравнений. Записав матрицу системы, приводим её элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 13 & -28 & -6 & -18 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -13 & 28 & 6 & 18 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 0 & 171 & 192 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 56 & 25 & 88 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 114 & 0 & 0 & 164 \\ 0 & 3192 & 0 & 3416 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 57 & 0 & 0 & 82 \\ 0 & 57 & 0 & 61 \\ 0 & 0 & 57 & 64 \end{pmatrix}$$

Здесь базисный минор расположен в первых трёх столбцах, главные неизвестные x_1, x_2, x_3, свободная неизвестная x_4.

Решение запишем в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{82}{57} x_4 \\ -\frac{61}{57} \cdot x_4 \\ -\frac{64}{57} \cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -82/57 \\ -61/57 \\ -64/57 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Полагая свободную переменную равной $x_4 = -57c$, запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X = c \cdot \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}$$

Итак, фундаментальную систему решений этой системы составляет, например, вектор $\begin{pmatrix} 82 & 61 & 64 & -57 \end{pmatrix}^T$. Этот вектор и образует базис в подпространстве $U \cap W$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix} \right\}$$ - базис подпространства $U \cap W$ (внутренний способ описания)

3-й способ решения, "аналитический" ([2], пример 4.24; [1], пример 8.12)

Составим векторное уравнение, определяющее векторы, принадлежащие пересечению $U \cap W$

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2,$$

или в матричной форме

$$A\alpha = B\beta$$

для удобства записи матрицы используем равенство в форме

$$A\alpha = -B\beta \qquad (*)$$

$$A\alpha + B\beta = 0$$

Найдём решение этой однородной системы уравнений. Составим блочную матрицу из столбцов векторов

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

и элементарными преобразованиями приведём её к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 37/25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/25 \end{pmatrix}$$

Вычисление в Mathcad 14:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{37}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

Систему, эквивалентную исходной, можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{7}{25}\cdot\beta_2 \\ \alpha_2 = \dfrac{3}{25}\cdot\beta_2 \\ \alpha_3 = -\dfrac{37}{25}\cdot\beta_2 \\ \beta_1 = -\dfrac{7}{25}\cdot\beta_2 \end{cases}$$

Решение запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{25}\beta_2 \\ \dfrac{3}{25}\beta_2 \\ -\dfrac{37}{25}\beta_2 \\ -\dfrac{7}{25}\beta_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \beta_2\cdot\begin{pmatrix} -7/25 \\ 3/25 \\ -37/25 \\ -7/25 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\beta_2}{25}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 37 \\ 7 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Свободная неизвестная одна, и фундаментальная система решений состоит из одного столбца. Теперь для каждого решения из ФСР вычислим, например, левую часть векторного уравнения. В данном случае имеем только одно фундаментальное решение, поэтому получаем один вектор, составляющий базис подпространства $U \cap W$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}$$

$\left\{\begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}\right\}$ - базис подпространства $U \cap W$

Этот же результат получим, используя правую часть векторного уравнения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -82 \\ -61 \\ -64 \\ 57 \end{pmatrix}$$

(результат получен с другим знаком, т.к. в начале решения в равенстве $*$ был сменён знак второго слагаемого)

Литература:

1) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. “Линейная алгебра в примерах и задачах”, 2005, стр. 413 (пример 8.12), стр. 416 (пример 8.13);
2) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 148 (пример 4.23), стр. 150 (пример 4.24);
3) Ермаков В.И. и др. "Сборник задач по высшей математике для экономистов", 2007, стр. 100.