

1) Пользуясь методом Гаусса, найти общее, а также одно базисное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -4x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Расширенную матрицу системы преобразуем методом Гаусса к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 6 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 10 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & -15 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Систему, равносильную исходной, можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_4 = 9 \\ 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 7 \end{cases}$$

Определение. Равенства, выражающие базисные переменные через свободные, называются **общим** решением системы.

Полагая переменные x_2 и x_4 свободными, а переменные x_1 и x_3 - базисными, запишем **общее решение** системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 7x_4 + 9 \\ x_3 = -2x_2 + 5x_4 + 7 \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений.

Замечание. В качестве основных (базисных) переменных могли быть выбраны другие переменные. Количество способов выбора r переменных из их общего числа n **не может быть больше** числа сочетаний из n элементов по r . Количество групп базисных переменных не более

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

(r - ранг системы, n - количество переменных).

Для каждой такой группы получаем свою запись общего решения, но все общие решения равносильны в том смысле, что они определяют равные бесконечные множества частных решений, получаемых из общего при фиксированных значениях свободных переменных.

Определения.

Решение системы, получающееся при задании конкретных значений свободных переменных, называется **частным** решением системы.

Решение системы, в котором все свободные переменные полагаются равными нулю, называется **базисным** (количество возможных базисных решений равно количеству вариантов определения базисных переменных).

Полагая $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, получаем **базисное решение** неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(количество возможных базисных решений совпадает с количеством вариантов определения базисных переменных)

Полученный результат можно записать компактно в форме вектора-столбца:

$$x = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Литература:

- 1) Малугин В.А. "Линейная алгебра (математика для экономистов): курс лекций", 2006, стр. 68 (фундаментальные решения), стр. 71 (пример);
- 2) Малугин В.А. "Линейная алгебра (математика для экономистов): задачи и упражнения", 2006, стр. 43 (пример 4);
- 3) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 202 (пример 5.5), стр. 198 (пример 5.4).