1) Решить систему алгебраических уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ x+3y+2z=-5 \\ 4x-y+3z=6 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$A\cdot X=B\text{, где}$$

основная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 2 & 3 & -5 \\ 6 & 8 & -17 \end{pmatrix},$$

вектор неизвестных

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

вектор правых частей

$$B=\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение ищем в виде $X=A^{-1}\cdot B$, где

обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$;

A^* - союзная (присоединённая) матрица;

$|A|$ - определитель матрицы A.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(9+2)+2\cdot(3-8)+(-1-12)=33-10-13=10\neq 0$$

Поскольку определитель матрицы A не равен 0, то матрица A - невырожденная; а всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Определение. Квадратная матрица называется невырожденной тогда и только тогда, когда её детерминант отличен от 0.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Союзная (присоединённая) матрица - это транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Вычисляем алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\-1&3\end{vmatrix}=9+2=11$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}=-(3-8)=5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\4&-1\end{vmatrix}=-1-12=-13$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&1\\-1&3\end{vmatrix}=-(-6+1)=5$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1\\4&3\end{vmatrix}=9-4=5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-2\\4&-1\end{vmatrix}=-(-3+8)=-5$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\3&2\end{vmatrix}=-4-3=-7$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=-(6-1)=-5$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2\\1&3\end{vmatrix}=9+2=11$$

Запишем союзную (присоединённую) матрицу:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&5&-7\\5&5&-5\\-13&-5&11\end{pmatrix}$$

и вычислим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{\det A}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}11&5&-7\\5&5&-5\\-13&-5&11\end{pmatrix}$$

Находим решение:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}11&5&-7\\5&5&-5\\-13&-5&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}11\cdot7+5\cdot(-5)-7\cdot6\\5\cdot7+5\cdot(-5)-5\cdot6\\-13\cdot7-5\cdot(-5)+11\cdot6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}77-25-42\\35-25-30\\-91+25+66\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}10\\-20\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.