

1) Дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Найти её решение с помощью формул Крамера. Выполнить проверку полученного результата.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

Систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, главный определитель которой отличен от нуля, называют **крамеровской** системой.

**Теорема (правило Крамера).** Крамеровская система линейных уравнений всегда совместна и имеет единственное решение, вычисляемое по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , получается из определителя  $\Delta$  системы заменой в нём  $j$ -го столбца столбцом свободных членов системы.

Решим неоднородную систему  $A \cdot X = B$  по формулам Крамера.

Вычисляем главный определитель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-25 - 5) - 7 \cdot (-15 + 2) - 2 \cdot (15 + 10) = -30 + 91 - 50 = 11 \neq 0 \end{aligned}$$

Определители  $\Delta_i$ , полученные из определителя основной матрицы заменой  $i$ -го столбца столбиком свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ -4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -33, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 22, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 44$$

Находим решение по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-33}{11} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4$$

Выполним проверку найденного решения подстановкой в исходное уравнение:

$$\begin{cases} -3 + 7 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 3 \\ 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 4 = 5 \\ -2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -4 \end{cases} \quad \text{- верно}$$

**Ответ:**  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ .

2) Решить систему с помощью определителей:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 5x - y - z = 10 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

Решим неоднородную систему линейных уравнений  $A \cdot X = B$  по формулам Крамера.

Вычисляем главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4 + 3) + 3 \cdot (20 + 1) + (15 + 1) = -2 + 63 + 16 = 77 \neq 0$$

Определители  $\Delta_i$ , полученные из определителя основной матрицы заменой  $i$ -го столбца столбиком свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 154, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -77, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 77$$

Находим решение по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{154}{77} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-77}{77} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{77}{77} = 1$$

Выполним проверку найденного решения подстановкой в исходное уравнение:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 8 \\ 5 \cdot 2 - (-1) - 1 = 10 \\ 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 3 \end{cases} \quad \text{- верно}$$

Ответ:  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = 1$ .

3) Решить систему уравнений, пользуясь формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 6x_3 - 2x_4 = 25 \\ 12x_2 + 17x_4 = -27 \end{cases}$$

Систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, главный определитель которой отличен от нуля, называют **крамеровской** системой.

**Теорема (правило Крамера).** Крамеровская система линейных уравнений всегда совместна и имеет единственное решение, вычисляемое по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , получается из определителя  $\Delta$  системы заменой в нём  $j$ -го столбца столбцом свободных членов системы.

Решим неоднородную систему  $A \cdot X = B$  по формулам Крамера.  
Вычисляем главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 12 & 0 & 17 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot [6 \cdot (-17 - 48) + 2 \cdot (0 - 48)] - 3 \cdot [17 \cdot (0 - 20)] =$$

$$= 2 \cdot (-390 - 96) - 3 \cdot (-340) = 48 \neq 0$$

Определители  $\Delta_i$ , полученные из определителя основной матрицы заменой  $i$ -го столбца столбиком свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 25 & 0 & 6 & -2 \\ -27 & 12 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -48, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 25 & 6 & -2 \\ 0 & -27 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 96,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 25 & -2 \\ 0 & 12 & -27 & 17 \end{vmatrix} = 192, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 25 \\ 0 & 12 & 0 & -27 \end{vmatrix} = -144$$

Находим решение по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{48} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{96}{48} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{192}{48} = 4, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-144}{48} = -3$$

Выполним проверку найденного решения подстановкой в исходное уравнение:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4 \\ -2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 2 \\ 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 25 \\ 12 \cdot 2 + 17 \cdot (-3) = -27 \end{cases} \quad \text{- верно}$$

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = -3$ .

Решение системы в Mathcad 14:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 6x_3 - 2x_4 = 25 \\ 12x_2 + 17x_4 = -27 \end{pmatrix} \quad \text{solve, } x_1, x_2, x_3, x_4 \rightarrow (-1 \quad 2 \quad 4 \quad -3)$$