1) Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра t, т.е. определить при каких значениях t система решений не имеет, при каких имеет единственное решение, при каких имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ t \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + t \cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется определённой, если она имеет только одно решение, и неопределённой, если она имеет больше одного решения.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными, главный определитель которой отличен от нуля, называют крамеровской системой.

Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы $r(\tilde{A}) = r(A)$.

Теорема.

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных $r(A) = n$, то система имеет единственное решение.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных $r(A) < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

► Расширенную матрицу системы методом Гаусса (с помощью элементарных преобразований над строками матрицы) приведём к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ t & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & t & 5 \end{pmatrix} \end{array} \underset{t\neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} t & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & t & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & t & 5 \\ 0 & t+2 & 2t+1 & 7t+8 \end{pmatrix} \underset{t\neq -2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} t & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & t & 5 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 2-2t \end{pmatrix}$$

(преобразование выполнено в предположении $t \neq 0$ и $t \neq -2$)

► Из последней матрицы видим, что возникает особый случай при

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t = \pm 1$$

При $t = -1$ ранг основной матрицы будет равен $r(A) = 2$, а ранг расширенной матрицы $r(\tilde{A}) = 3$. Согласно теореме Кронекера-Капелли, в этом случае система уравнений несовместна, т.е. не имеет решений.

При $t = 1$ имеем $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$, т.е. система совместна. Так как число неизвестных $n = 3$, то $r(A) < n$, и значит система уравнений неопределённа, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

При $t \neq \pm 1$ имеем $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, т.е. система совместна. Так как число неизвестных $n = 3$, то $r(A) = n$, и значит система уравнений определённа, т.е. имеет единственное решение.

► Рассмотрим исключённые ранее случаи $t=0$ и $t=-2$.

При $t=0$ получаем матрицу (выполняем преобразование с этапа *, т.е. сначала):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- в этом случае $r(A)=r(\tilde{A})=n=3$, и система уравнений определённа, т.е. имеет единственное решение.

При $t=-2$ получаем матрицу (этап преобразований **):

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

- в этом случае также $r(A)=r(\tilde{A})=n=3$, и система уравнений определённа, т.е. имеет единственное решение.

► Вывод.
При $t=-1$ система уравнений несовместна, т.е. не имеет решений.
При $t=1$ система уравнений совместна и неопределённа, т.е. имеет бесчисленное множество решений.
При $t\neq\pm1$ система уравнений совместна и определённа, т.е. имеет единственное решение.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 30.

2) Исследовать и решить систему линейных уравнений в зависимости от параметра t, т.е. определить при каких значениях t система решений не имеет, при каких имеет единственное решение, при каких имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - t\cdot x_3 = 2 \\ x_1 + t\cdot x_2 + x_3 = t+1 \end{cases}$$

► Расширенную матрицу системы методом Гаусса (с помощью элементарных преобразований над строками матрицы) приведём к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 & (t+1) \\ 1 & -2 & t & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & (t+1) \\ 0 & (t+2) & (1-t) & (t-1) \\ 0 & (t+1) & 0 & (t+1) \end{pmatrix} \sim \ldots$$

► Из последней матрицы видим, что возникает особый случай при

$$t+1=0$$

$$t=-1$$

При $t=-1$:

$$\ldots\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&-2\\0&1&2&-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2-3x_3\\x_2=-2-2x_3\end{cases}$$

имеем $r(A)=r(\tilde{A})=2$, т.е. система совместна. Так как число неизвестных $n=3$, то $r(A)<n$, и значит система уравнений неопределённа, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

► Если $t\neq-1$:

$$\ldots\sim\begin{pmatrix}1&t&1&(t+1)\\0&(t+2)&(1-t)&(t-1)\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&t&1&(t+1)\\0&1&0&1\\0&(t+2)&(1-t)&(t-1)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&t&1&(t+1)\\0&1&0&1\\0&0&(1-t)&-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{t-4}{t-1}\\x_2=1\\x_3=\dfrac{3}{t-1}\end{cases}$$

При $t=1$ ранг основной матрицы будет равен $r(A)=2$, а ранг расширенной матрицы $r(\tilde{A})=3$. Согласно теореме Кронекера-Капелли, в этом случае система уравнений несовместна, т.е. не имеет решений.

При $t\neq\pm1$ имеем $r(A)=r(\tilde{A})=3$, т.е. система совместна. Так как число неизвестных $n=3$, то $r(A)=n$, и значит система уравнений определённа, т.е. имеет единственное решение.

Ответ.

а) при $t=1$ решений нет;

б) при $t\neq\pm1$ единственное решение $\begin{cases}x_1=\dfrac{t-4}{t-1}\\x_2=1\\x_3=\dfrac{3}{t-1}\end{cases}$

в) при $t=-1$ бесконечное количество решений; общее решние имеет вид $\begin{cases}x_1=-2-3x_3\\x_2=-2-2x_3\end{cases}$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005;
2) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003.