

1) Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

Если она совместна, то найти её общее решение.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется **определённой**, если она имеет только одно решение, и **неопределённой**, если она имеет больше одного решения.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными, главный определитель которой отличен от нуля, называют **крамеровской** системой.

Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы $r(\tilde{A}) = r(A)$.

Теорема.

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных $r(A) = n$, то система имеет единственное решение.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных $r(A) < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

► Исследуем систему, опираясь на теорему Кронекера-Капелли. Найдём ранги основной и расширенной матрицы системы. Чтобы не выполнять двойной работы, преобразуем расширенную матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 & -8 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -1 & 2 & -8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 7 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/15 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 19/15 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Из последней матрицы видим, что $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$, т.е. система совместна. Так как число неизвестных $n = 4$, то $r(A) < n$, и значит система уравнений неопределённая, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

► Решение системы.

Полученную ранее упрощенную матрицу системы запишем в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{15}x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 + \frac{19}{15}x_4 = 1 \end{cases}$$

Пусть свободные переменные x_3 и x_4 ; выразив главные (базисные) переменные x_1 и x_2 через свободные, получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4 \end{cases}$$

Очевидно, что свободными переменными могут быть и другие пары переменных; тогда и общее решение системы будет иметь другой вид.

Количество свободных (неосновных) переменных определяется числом ненулевых строк ступенчатой матрицы системы. В качестве главных (основных, базисных) переменных можно взять любые две переменные, чей базисный минор отличен от нуля.

Общее число групп основных переменных не более $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$.

В данном случае 5 групп основных переменных:

$$x_1 \text{ и } x_2: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x_1 \text{ и } x_3: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x_1 \text{ и } x_4: \begin{vmatrix} 1 & 7/15 \\ 0 & 19/15 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x_2 \text{ и } x_4: \begin{vmatrix} 0 & 7/15 \\ 1 & 19/15 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x_3 \text{ и } x_4: \begin{vmatrix} 0 & 7/15 \\ 1 & 19/15 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для каждой такой группы получаем свою запись общего решения, но все общие решения равносильны в том смысле, что они определяют равные бесконечные множества частных решений, получаемых из общего при фиксированных значениях свободных переменных.

Литература:

- 1) Стёпин В.П. "Высшая математика", методичка СИНХ (Екатеринбург), 2006, стр. 42, 44;
- 2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 22 (свойства определителей), стр. 31;
- 3) Кремер Н.Ш. "Высшая математика для экономических специальностей", 2006, стр. 92 (пример 2.4).