

1) Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{и в матричной форме уравнение имеет вид } A \cdot X = B.$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Итак, решение находим по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Обратную матрицу найдём методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Искомая матрица:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & -4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 6 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Литература:

1) Киркинский А.С. "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", 2006, стр. 60 (пример 10).

2) Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{и в матричной форме уравнение имеет вид } A \cdot X = B.$$

Решение находим по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Обратную матрицу находим методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & | & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Искомая матрица:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 & -2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \\ -2 \cdot 5 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 12 & -6 & 12 \\ -18 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка в Mathcad 13:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$