Равномерное распределение.

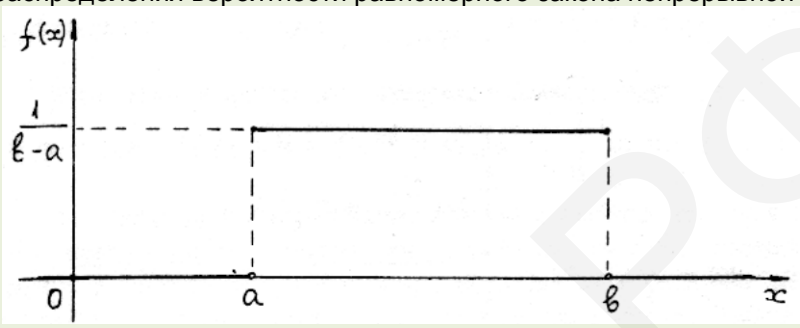
► Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \text{если } x\in[a\,;\,b]\\ 0 & , \text{если } x\notin[a\,;\,b]\end{cases}$$

Математическое ожидание $M[X]$ и дисперсия $D[X]$:

$$MX=\frac{a+b}{2}\ ,\quad DX=\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

► График плотности распределения вероятности равномерного закона непрерывной случайной величины:



1) С.в. X распределена равномерно на отрезке $[0,2\,;\,3,4]$. Записать $f(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Для равномерного распределения с параметрами a и b плотность вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \text{если } x\in[a\,;\,b]\\ 0 & , \text{если } x\notin[a\,;\,b]\end{cases}$$

Математическое ожидание $M[X]$ и дисперсия $D[X]$:

$$MX=\frac{a+b}{2}\ ,\quad DX=\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

Итак, $a=0,2$, $b=3,4$,

$$\frac{1}{b-a}=\frac{1}{3,4-0,2}=\frac{1}{3,2}=\frac{5}{16}=0,3125\,;$$

следовательно

$$f(x)=\begin{cases}0,3125 & , \text{если } x\in[0,2\,;\,3,4]\\ 0 & , \text{если } x\notin[0,2\,;\,3,4]\end{cases}$$

и

$$MX=\frac{a+b}{2}=\frac{0,2+3,4}{2}=1,8$$

$$DX=\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{3,4-0,2}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{64}{75}\approx 0,853$$

ЯУДОВ.РФ

2) Длина X прямоугольника измерена приближённо, ширина $Y = X - 1$. Рассматривая сторону прямоугольника X как с.в., равномерно распределённую в интервале $(2\ ;\ 2,2)$, найти мат. ожидание и дисперсию площади прямоугольника.

По условию задачи, для вычисления площади прямоугольника используется результат измерения только его длины. Если длина прямоугольника x, то его площадь $S(x) = x \cdot (x-1)$.

Обозначим:

ξ - случайная величина “площадь прямоугольника”;

X - случайная величина “длина прямоугольника”.

Плотность вероятности с.в. X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2,2-2} = 5 & , \text{если } x \in [2\ ;\ 2,2] \\ 0 & , \text{если } x \notin [2\ ;\ 2,2] \end{cases}$$

Если $Y = \varphi(X)$ - функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат интервалу $(a\,;\,b)$, то

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$$

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \left(\varphi(x) - M[\varphi(X)]\right)^2 f(x)\,dx \quad \text{или} \quad D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)\,dx - \left(M[\varphi(X)]\right)^2$$

- Вычислим мат. ожидание случайной величины ξ:

$$M(\xi) = M(X \cdot (X-1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - x\right) f(x)\,dx = 5 \cdot \int_2^{2,2} \left(x^2 - x\right) dx = 5 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^{2,2} =$$

$$= 5 \cdot \left[\left(\frac{2,2^3}{3} - \frac{2,2^2}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right)\right] = \frac{347}{150} = 2\frac{47}{150} = 2,31(3)$$

- Вычислим дисперсию случайной величины ξ. По определению:

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi)$$

$$M\left(\xi^2\right) = M\left(X^2 \cdot (X-1)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) f(x)\,dx = 5 \cdot \int_2^{2,2} \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{2,2} = 5 \cdot \left[\left(\frac{2,2^5}{5} - \frac{2,2^4}{2} + \frac{2,2^3}{3}\right) - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{2} + \frac{2^3}{3}\right)\right] = \frac{100981}{18750}$$

Так что

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = \frac{100981}{18750} - \left(\frac{347}{150}\right)^2 = \frac{3841}{112500} \approx 0,034$$

Ответ: $M(\xi) = 2\dfrac{47}{150} \approx 2,313$,

$D(\xi) = \dfrac{3841}{112500} \approx 0,034$.

Литература:
1) Гмурман В.Е. "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике", 2005, стр. 95;
2) Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. "Теория вероятностей в задачах и упражнениях", 2005, стр. 155, 165 (пример 8.29).

3) Двумерная с.в. (X,Y) имеет равномерное распределение плотности вероятности в треугольной области ABC, заданное функцией $f(x,y)$. Эта функция принимает значение $1/S$, если точка с координатами (x,y) принадлежит области ABC, и 0, если точка с координатами (x,y) не принадлежит данной области (S - площадь треугольника ABC,

$A(0;0)$,

$B(-2;2)$,

$C(2;2)$).

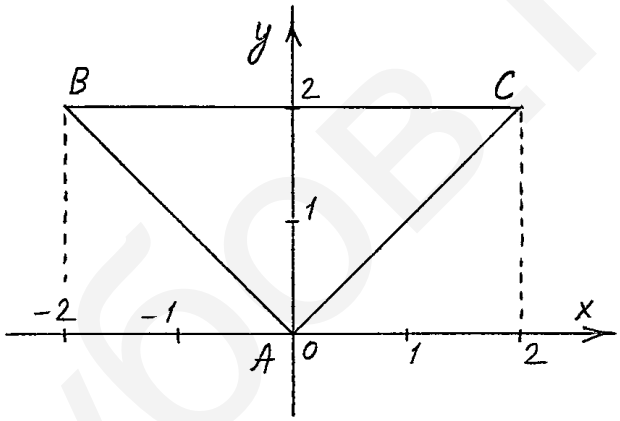
Определить:

а) плотность распределения составляющей X - $f_X(x)$ и составляющей Y - $f_Y(y)$;

б) мат. ожидание MX и MY, дисперсию DX и DY.

Найти коэффициент корреляции с.в. X и Y; установить, являются ли случайные величины независимыми.

Изобразим треугольную область ABC:



Площадь $\triangle ABC$:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4 \text{ (кв. ед.)}$$

Т.е.

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/4 & \text{если } (x;y)\in\triangle ABC \\ 0 & \text{если } (x;y)\notin\triangle ABC \end{cases}$$

При движении по направлению оси y пересекаем ломаную линию BAC и прямую BC:

$$y_{BAC}=|x| \quad (BAC)$$

$$y_{BC}=2 \quad (BC)$$

При движении по направлению оси x пересекаем прямую AB и прямую AC:

$$x_{AB}=-y \quad (AB)$$

$$x_{AC}=y \quad (AC)$$

а)

Найдём плотность вероятности одномерной составляющей X:

если $-2\le x\le 2$, то $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int\limits_{|x|}^{2}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}\cdot(2-|x|)$, т.е.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot(2-|x|) & \text{если } x\in[-2;\,2]\\ 0 & \text{если } x\notin[-2;\,2]\end{cases}$$

и плотность вероятности одномерной составляющей Y:

если $0\le y\le 2$, то $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_{-y}^{y}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot(y-(-y))=\frac{1}{2}\cdot y$, т.е.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot y & \text{если } y\in[0;\,2]\\ 0 & \text{если } y\notin[0;\,2]\end{cases}$$

б)

$$a_x=M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-y}^{y}x\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-y}^{y}dy=\frac{1}{8}\cdot\int\limits_{0}^{2}\left(y^2-(-y)^2\right)dy=0$$

$$a_y=M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-y}^{y}y\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}y\cdot x\Big|_{-y}^{y}dy=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}y\cdot(y-(-y))\,dy=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{2}y^2dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{6}\cdot(8-0)=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a_x)^2\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-y}^{y}(x-0)^2\,dx\,dy=\frac{2}{3}$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-a_y)^2\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-y}^{y}\left(y-\frac{4}{3}\right)^2dx\,dy=\frac{2}{9}$$

(двойные интегралы в выражениях для $D(X)$ и $D(Y)$ вычислены в Mathcad)

► Коэффициент корреляции вычислим по формуле

$$\rho=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},$$

где K_{xy} - ковариация (корреляционный момент),

σ_x и σ_y - среднеквадратические отклонения одномерных с.в. X и Y.

$$K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a_x)\cdot(y-a_y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-y}^{y}(x-0)\cdot\left(y-\frac{4}{3}\right)dx\,dy=0$$

и соответственно коэффициент корреляции

$$\rho=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=0$$

Т.к. $\rho=0$, то случайные величины X и Y некоррелированы. Но из некоррелированности величин ещё не вытекает их независимость [1, стр. 207].

► Критерием независимости с.в. служит выполнение равенства

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

(для независимых непрерывных случайных величин их совместная плотность равна произведению плотностей вероятностей этих случайных величин).

Поскольку для произвольной точки рассматриваемой треугольной области не может быть выполнено равенство

$$\frac{1}{4}\cdot\left(2-|x|\right)\cdot\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}$$

$$\left(2-|x|\right)\cdot y=2$$

то данные случайные величины не являются независимыми.

Литература:

1) Кремер Н.Ш. “Теория вероятностей и математическая статистика”, 2006, стр. 190, стр. 191 (пример 5.3), стр. 206 (пример 5.6).

4) Для имеющейся совокупности опытных данных (выборки) требуется:
1) Построить статистический ряд и гистограмму распределения.
2) Вычислить следующие статистики распределения:
выборочную среднюю,
выборочное среднеквадратическое отклонение,
коэффициент вариации,
асимметрию,
экцесс.
Раскрыть смысловую сторону каждой статистики.
3) Обосновать выбор теоретического распределения и методом моментов найти его параметры.
4) Построить теоретическую кривую распределения.
5) Проверить согласованность теоретического и выборочного распределений, применяя критерий согласия Пирсона.

В результате эксперимента реализовались 100 значений измеряемой величины, которые получены случайным выбором из генеральной совокупности. Итак, задана выборка (или простая статистическая совокупность), состоящая из 100 значений ($n=100$):

13,2	16,5	19,6	6,6	17,2	24,4	20,4	1,4	5,7	4,4
11,3	8,8	3,6	17,4	1,8	4,7	10,6	7,7	9,1	3,2
4,5	19,5	13,3	25,7	11,4	9,8	0,9	25,4	2,9	13,1
25,2	6,1	19,3	11,0	9,5	12,8	7,1	7,3	15,5	2,5
2,9	19,6	8,1	0,3	10,1	23,2	11,4	17,4	7,0	16,3
18,1	14,6	25,5	16,4	20,7	12,4	1,7	2,4	2,2	8,9
7,7	6,4	12,7	23,1	8,3	25,9	20,9	15,4	1,5	4,8
8,1	3,1	24,0	11,2	15,8	2,2	10,7	22,0	11,6	8,1
3,8	17,8	0,5	25,4	20,8	18,4	21,4	13,5	1,0	18,6
14,6	7,1	5,3	11,7	13,6	17,5	11,6	25,7	23,0	13,8

1

Выбираем из этой совокупности наименьшее и наибольшее значения:

$$x_{наим.}=0,3$$

$$x_{наиб.}=25,9$$

Округляем граничные значения до 0 и 26. Разбиваем этот интервал на частичные интервалы (разряды) и подсчитываем количество наблюдений, приходящееся на каждый разряд. Обычно число разрядов выбирают в промежутке 7...15. Пусть количество разрядов $k=13$, и их длина h постоянна; тогда

$$h=\frac{26-0}{13}=2\,.$$

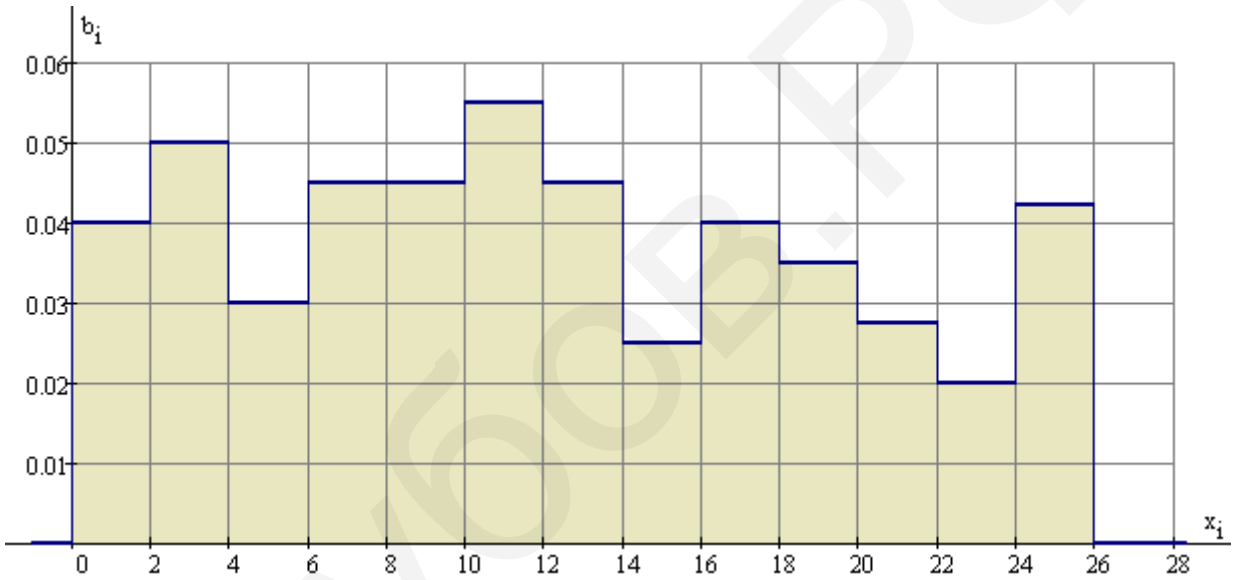
Составим интервальный статистический ряд (табл. 1).

таблица 1

Номер i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
i -й разряд	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26
Число наблюдений m_i	8	10	6	9	9	11	9	5	8	7	5,5	4	8,5
Частота p_i^*	0,08	0,10	0,06	0,09	0,09	0,11	0,09	0,05	0,08	0,07	0,055	0,04	0,085
Частость $b_i^* = p_i^* / h$	0,04	0,05	0,03	0,045	0,045	0,055	0,045	0,025	0,04	0,035	0,0275	0,02	0,0425

$$\left(n = \sum_{i=1}^{13} m_i = 100 \,,\ h = 2 \right)$$

Используя данные таблицы 1, построим гистограмму распределения (зависимость $b_i\left(x_i\right)$).



2

Для вычисления статистик распределения интервальный ряд табл.1 заменим дискретным статистическим рядом, ставя в соответствие каждому разряду его середину:

таблица 2

Номер i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Середина интервала x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Число наблюдений m_i	8	10	6	9	9	11	9	5	8	7	5,5	4	8,5
Частота p_i^*	0,08	0,10	0,06	0,09	0,09	0,11	0,09	0,05	0,08	0,07	0,055	0,04	0,085

По данным табл. 2 вычислим выборочные начальные моменты распределения по следующим формулам:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^* \,, \quad a_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i^* \,, \quad a_3 = \sum_{i=1}^{k} x_i^3 \cdot p_i^* \,, \quad a_4 = \sum_{i=1}^{k} x_i^4 \cdot p_i^* \,.$$

Получаем:

$$a_1 = 12,14$$

$$a_2 = 200,88$$

$$a_3 = 3816,98$$

$$a_4 = 78461,88$$

Вычисления в Mathcad 15:

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \\ 19 \\ 21 \\ 23 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.1 \\ 0.06 \\ 0.09 \\ 0.09 \\ 0.11 \\ 0.09 \\ 0.05 \\ 0.08 \\ 0.07 \\ 0.055 \\ 0.04 \\ 0.085 \end{pmatrix}$$

$$a_1 := B \cdot C \qquad a_1 = 12.14$$

$$\rightarrow$$

$$a_2 := B^2 \cdot C \qquad a_2 = 200.88$$

$$\rightarrow$$

$$a_3 := B^3 \cdot C \qquad a_3 = 3816.98$$

$$\rightarrow$$

$$a_4 := B^4 \cdot C \qquad a_4 = 78461.88$$

$$a_2 - a_1^2 = 53.5 \qquad \sqrt{a_2 - a_1^2} = 7.314$$

$$a_3 - 3 \cdot a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1^3 = 79.307$$

$$a_4 - 4 \cdot a_3 \cdot a_1 + 6 \cdot a_2 \cdot a_1^2 - 3 \cdot a_1^4 = 5580.776$$

Определяем статистики выборочного распределения.

Выборочная средняя $\overline{x} = a_1 = 12,14$. Выборочная средняя - статистический аналог математического ожидания.

Выборочная дисперсия $s^2 = a_2 - a_1^2 = 200,88 - 12,14^2 = 53,5004$. Выборочная дисперсия - аналог дисперсии; характеризует рассеяние случайной величины вокруг её среднего значения.

Выборочное среднеквадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{53,5004} \approx 7,314$.

Коэффициент вариации $V = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{7,314}{12,14} \cdot 100 \approx 60\,\%$. Коэффициент вариации 60% относительно невысок, что говорит о небольшом разбросе значений признака относительно некоторой средней величины.

Асимметрия $A_s = \frac{\mu_3}{s^3}$, где третий центральный момент

$$\mu_3 = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3 = 3816,98 - 3 \cdot 12,14 \cdot 200,88 + 2 \cdot 12,14^3 \approx 79,307$$

$$A_s = \frac{79,307}{7,314^3} \approx 0,203$$

Экцесс $E_x = \frac{\mu_4}{s^4} - 3$, где четвёртый момент

$$\mu_4 = a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 3a_1^4 = 78461,88 - 4 \cdot 3816,98 \cdot 12,14 + 6 \cdot 200,88 \cdot 12,14^2 - 3 \cdot 12,14^4 \approx 5580,78$$

$$E_x = \frac{5580,78}{7,314^4} - 3 \approx -1,050$$

Третий центральный момент и коэффициент асимметрии служат для характеристики асимметрии (скошенности) распределения. В нашем случае асимметрия близка к нулю, что может быть характерно для нормального или равномерного распределения, когда распределение симметрично относительно математического ожидания. (например, для показательного распределения асимметрия может быть около 2) .

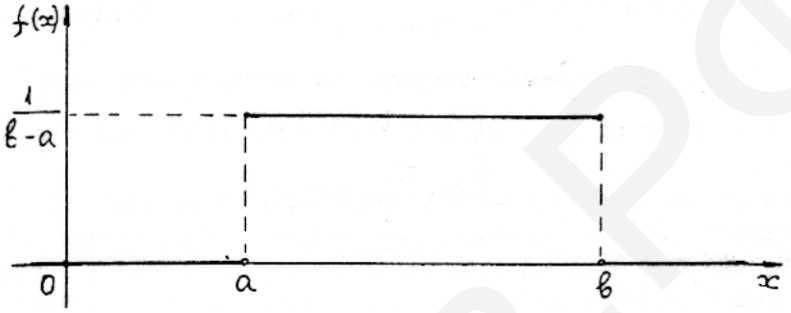
Четвёртый центральный момент характеризует крутость (островершинность или плосковершинность) распределения. Кривые, более островершинные, чем нормальная, обладают положительным экцессом, более плосковершинные - отрицательным экцессом. В нашем случае экцесс распределения отрицателен, что говорит о плосковершинности кривой распределения, что в совокупности с малой асимметрией может быть характерно для равномерного распределения.

Для нормального распределения и асимметрия и экцесс равны 0 - это не соответствует нашему случаю.

3

Исходя из вида гистограммы и значений вычисленных статистик (экцесс отрицателен, асимметрия мала, коэффициент вариации небольшой 60%), выбираем в качестве теоретического распределения равномерное (с параметром λ). Т.е. принимаем, что неизвестная плотность теоретического распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \text{ если } x\in[a\ ;\ b] \\ 0 & , \text{ если } x\notin[a\ ;\ b] \end{cases}$$



Теперь возникает задача о наилучшем выборе параметров распределения (в данном случае это параметры a и b). Для решения этой задачи будем руководствоваться методом моментов, который предполагает, что наилучшими значениями параметров распределения являются те, для которых теоретические значения первых двух моментов распределения совпадают с выборочными (статистиками распределения).

В случае равномерного распределения параметры a и b вычисляем по формулам

$$a=\overline{x}-s\cdot\sqrt{3}=12{,}14-7{,}314\cdot\sqrt{3}\approx-0{,}5$$

$$b=\overline{x}+s\cdot\sqrt{3}=12{,}14+7{,}314\cdot\sqrt{3}\approx 24{,}8$$

Итак, в качестве теоретической (сглаживающей) кривой распределения возьмём график функции

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}0395 & , \text{ если } x\in[-0{,}5\ ;\ 24{,}8] \\ 0 & , \text{ если } x\notin[-0{,}5\ ;\ 24{,}8] \end{cases}$$

ЯГУБОВ.РФ

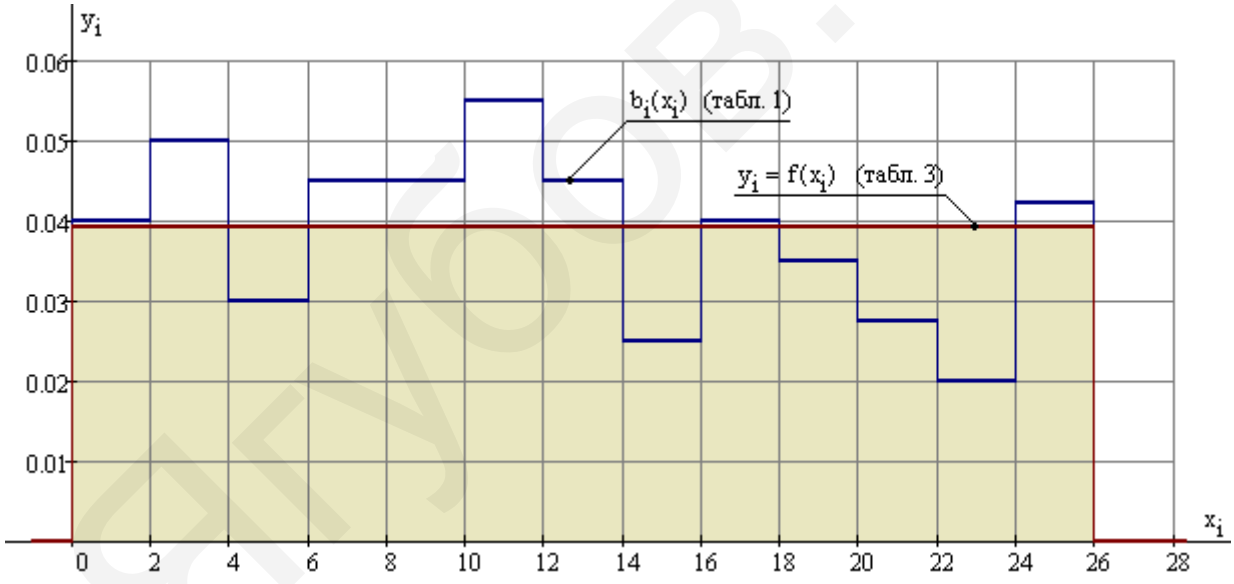
4

Для построения этой кривой, а также для проведения дальнейшей статистической обработки составим следующую таблицу:

таблица 3

1	2	3	4	5	6	7
x_i	m_i	$y_i = f(x_i)$	$p_i = h \cdot y_i$	$n \cdot p_i$	$m_i - n \cdot p_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	8	0,0395	0,0790	7,90	0,10	0,001
3	10	0,0395	0,0790	7,90	2,10	0,558
5	6	0,0395	0,0790	7,90	-1,90	0,467
7	9	0,0395	0,0790	7,90	1,10	0,153
9	9	0,0395	0,0790	7,90	1,10	0,153
11	11	0,0395	0,0790	7,90	3,10	1,216
13	9	0,0395	0,0790	7,90	1,10	0,153
15	5	0,0395	0,0790	7,90	-2,90	1,065
17	8	0,0395	0,0790	7,90	0,10	0,001
19	7	0,0395	0,0790	7,90	-0,90	0,103
21	5,5	0,0395	0,0790	7,90	-2,40	0,729
23	4	0,0395	0,0790	7,90	-3,90	1,925
25	8,5	0,0395	0,0790	7,90	0,60	0,046
						6,570

Кривая $y_i = f(x_i)$ изображена для наглядности на одном чертеже с гистограммой распределения (см. пункт 1) и хорошо согласуется с данными выборки (пока это только визуальная оценка).



5

Оценим согласованность выбранного теоретического распределения с опытными данными в соответствии с критерием Пирсона (критерий χ^2 [хи квадрат]). Критерий согласия Пирсона - наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения (гипотезу, однозначно фиксирующую распределение наблюдений, называют простой (в ней речь идёт об одном значении параметра), в противном случае - сложной). Суммируя величины колонки 10 в таблице 3, получаем величину $\chi^2_{\text{р}} = \sum_{i=1}^{13} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 6,57$, характеризующую меру расхождения теоретического и статистического распределений. Чем больше величина χ^2, тем больше это расхождение.

Зададимся некоторым критическим значением уровня значимости $\alpha = P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{р}}\right)$, например $\alpha_{\text{кр.}} = P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{р}}\right) = 0,05$, который должен быть превышен для принятия гипотезы о законе распределения. Отметим, что принятие гипотезы всегда происходит на некотором субъективно принятом уровне значимости и основывается на значениях конечной выборки (в данном случае $n = 100$). Обычно ориентируются на критическое значение уровня значимости $\alpha = 0,01 \ldots 0,05$ ($\alpha = 0,01$ соответствует более мягкому подходу в оценке гипотезы, $\alpha = 0,05$ соответствует более строгому подходу в оценке гипотезы).

По таблице критических точек χ^2 - распределения исходя из числа степеней свободы $r = k - 3 = 13 - 3 = 10$ (k - число разрядов) и реализовавшегося значения $\chi^2_{\text{р}} = 6,57$ находим величину $\alpha_{кр.} = P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{\text{р}}\right) = P\left(\chi^2 \geq 6,57\right) \approx 0,77$, т.е. вероятность того, что величина, распределённая по закону χ^2, превысит значение $\chi^2_{\text{р}}$.

Таблицы довольно грубы; проще и быстрее значение α вычисляется, например в Mathcad 15:

$$\varphi(x,r) := \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot x^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad \alpha := \int_{6.57}^{\infty} \varphi(x,10)\, dx = 0.765$$

Поскольку вероятность $\alpha > \alpha_{кр.}$ $(0,77 > 0,05)$, то можно считать, что эмпирически принятое теоретическое равномерное распределение не противоречит опытным данным и гипотеза о виде распределения и о его параметрах может быть принята. Другими словами, принятая гипотеза не противоречит имеющимся выборочным данным на уровне значимости $0,05$, или уровне надёжности (уровне доверия) $1 - 0,05 = 0,95$.

Литература:

1) Белугин В.И., Величко Т.В., Поповский Э.Е. "Высшая математика", часть 4, методичка УрГУПС, 2001, стр. 29;
2) Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. "Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями", 2005, стр. 284...287, стр. 585;
3) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике", 2004, стр. 212, 216;
4) Кремер Н.Ш. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2006, стр. 173 (формула плотности вероятности χ^2 - распределения);
5) Белько И.В., Свирид Г.П. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2004, стр. 146, 155, 239;
6) Бирюкова Л.Г. и др. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2004, стр. 86 (числа степеней свободы).