

1) Случайная величина X задана плотностью распределения вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{при } -2 < x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$ и математическое ожидание $M(X)$.

$f(x)$ - плотность распределения (плотность распределения вероятностей, плотность, дифференциальная функция распределения) случайной величины X ; $f(x) = F'(x)$.

$F(x)$ - функция распределения (функция распределения вероятностей, интегральная функция распределения) случайной величины X ; $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

а)

Используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Если $x \leq -2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $-2 < x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^x \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = 0 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-2}^x = \frac{x^2}{4} + x + 1$.

Если $x > 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx + \int_0^x 0 dx = 0 + 1 + 0 = 1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{x^2}{4} + x + 1 & \text{при } -2 < x \leq 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

б)

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

$$M(X) = \int_{-2}^0 x \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-2}^0 = -\frac{2}{3}$$

Или, в общем виде решение находим так:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{-2} x \cdot 0 dx + \int_{-2}^0 x \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 0 dx = 0 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-2}^0 + 0 = -\frac{2}{3}$$

Литература:

- 1) Гмурман В.Е. "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике", 2005, стр. 92 (задача 267), стр. 95 (Мх);
- 2) Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. "Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями", 2005, стр. 153 (пример 6.1).

2) Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{ax^2}{4} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти:

- а) коэффициент a ;
- б) дифференциальную функцию;
- в) математическое ожидание.

а)

1-й способ решения.

Для определения постоянной нормировки a воспользуемся свойством функции распределения:

$0 \leq F(x) \leq 1$. Так как случайная величина X задана на отрезке $[0; 2]$, то для непрерывности функции

$F(x)$ должны выполняться условия:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(2) = 1 \end{cases}$$

откуда находим коэффициент a :

$$\begin{cases} \frac{a \cdot 0^2}{4} = 0 \\ \frac{a \cdot 2^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$a = 1$

2-й способ решения.

Постоянную нормировки a можно найти из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 1$$

$$\frac{a \cdot 2^2}{4} - \frac{a \cdot 0^2}{4} = 1$$

$a = 1$

Так что функция распределения (интегральная функция распределения) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

б)

Плотность распределения (плотность распределения вероятностей, плотность, дифференциальная функция распределения) случайной величины X :

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

в)

Математическое ожидание случайной величины X

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике", 2004, стр. 72, 226 (упражнение 1);
- 2) Золотарёвская Д.И. "Теория вероятностей. Задачи с решениями", 2005, стр. 133 (задача 108).

3) Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi \\ \cos 2x & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Требуется

- а) найти плотность распределения $f(x)$,
- б) найти математическое ожидание и дисперсию X ,
- в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$,
- г) вычислить $P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{5\pi}{6}\right)$.

а)

Учитывая, что $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi \\ -2\sin 2x & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \\ 0 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

б)

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\frac{3\pi}{4}} x \cdot 0 dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x \cdot (-2\sin 2x) dx + \int_{\pi}^{\infty} x \cdot 0 dx = \pi - \frac{1}{2}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x) dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(x - \pi + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-2\sin 2x) dx = \frac{\pi - 3}{4}$$

в)

График плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi \\ -2 \sin 2x & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \\ 0 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

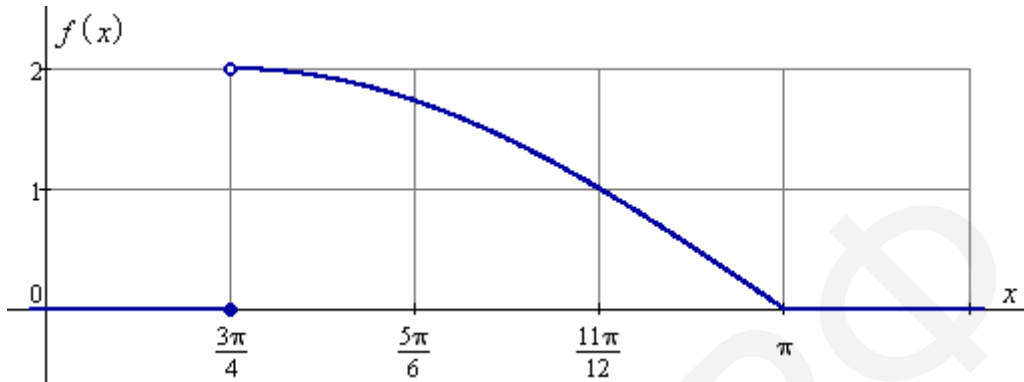
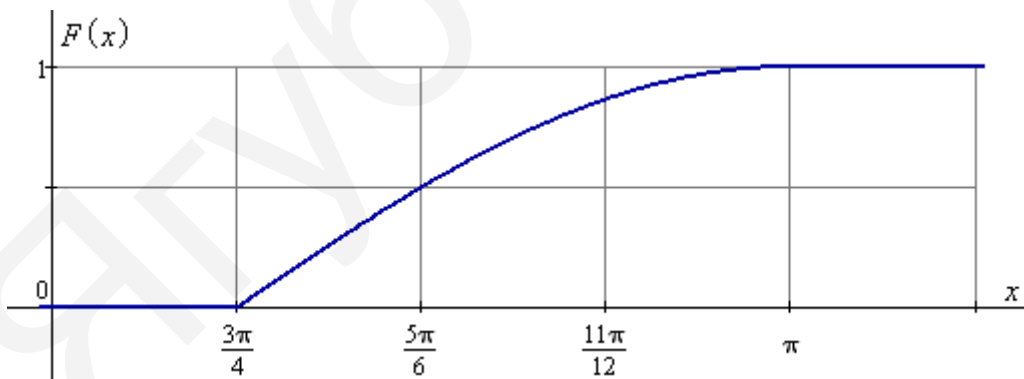


График функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi \\ \cos 2x & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

**г)**

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{5\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} 0 dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} (-2 \sin 2x) dx = 0 + \cos 2x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

или, через функцию распределения:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\frac{5\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} - 0 = \frac{1}{2}$$

Литература:

- 1) Кремер Н.Ш. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2006, стр. 116 (пример 3.14);
- 2) Золотарёвская Д.И. "Теория вероятностей. Задачи с решениями", 2005, стр. 131 (задача 107).

4) Плотность распределения вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ x+1, & -1 < x \leq 0 \\ -x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Найти $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$. Определить $P\{X > 0,5\}$.

► Для вычисления интегральной функции распределения используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Если $x \leq -1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Если $-1 < x \leq 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^x (x+1) dx = 0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^x = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}.$$

Если $0 < x \leq 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^x (-x+1) dx = 0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^x = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}.$$

Если $x > 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx + \int_1^x 0 dx = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Итак, интегральная функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

► Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0 dx + \int_{-1}^0 x \cdot (x+1) dx + \int_0^1 x \cdot (-x+1) dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 0 dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + x) dx + \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 = 0 \end{aligned}$$

Дисперсия

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx = \int_{-1}^0 (x - 0)^2 \cdot (x + 1) dx + \int_0^1 (x - 0)^2 \cdot (-x + 1) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx + \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0,408$$

► Вероятность того, что случайная величина примет значение, большее 0,5:

$$P\{X > 0,5\} = \int_{0,5}^{\infty} f(x) dx = \int_{0,5}^1 (-x + 1) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{0,5}^1 = \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} = 0,125$$

или, через функцию распределения:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < +\infty\right) = F(+\infty) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} = 0,125$$

5) Дана функция плотности распределения непрерывной с.в. X

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot (x+1), & -1 \leq x < 0 \\ A \cdot (x-1)^2, & 0 \leq x < 2 \\ A \cdot (-x+3), & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Найти постоянную нормировки A и интегральную функцию распределения. Вычислить м.о., дисперсию и с.к.о. X . Изобразить функцию плотности распределения и интегральную функцию распределения графически. На графике функции плотности распределения отметить м.о. и с.к.о.

► Постоянную нормировки найдём из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 A \cdot (x+1) dx + \int_0^2 A \cdot (x-1)^2 dx + \int_2^3 A \cdot (-x+3) dx &= A \cdot \left[\int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^2 (x-1)^2 dx + \int_2^3 (-x+3) dx \right] = \\
 &= A \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{3}{5} \cdot (x+1), & -1 < x \leq 0 \\ \frac{3}{5} \cdot (x-1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{3}{5} \cdot (-x+3), & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

► Для нахождения интегральной функции распределения используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Если $x \leq -1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $-1 < x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^x \frac{3}{5} \cdot (x+1) dx = 0 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^x = \frac{3}{10} \cdot x^2 + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{10}$.

Если $0 < x \leq 2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{3}{5} \cdot (x+1) dx + \int_0^x \frac{3}{5} \cdot (x-1)^2 dx =$$

$$= 0 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_0^x = \frac{1}{5} \cdot x^3 - \frac{3}{5} \cdot x^2 + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{10}$$

Если $2 < x \leq 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{3}{5} \cdot (x+1) dx + \int_0^2 \frac{3}{5} \cdot (x-1)^2 dx + \int_2^x \frac{3}{5} \cdot (-x+3) dx =$$

$$= 0 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_0^2 + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_2^x = -\frac{3}{10} \cdot x^2 + \frac{9}{5} \cdot x - \frac{17}{10}$$

Если $x > 3$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 \frac{3}{5} \cdot (x+1) dx + \int_0^2 \frac{3}{5} \cdot (x-1)^2 dx + \int_2^3 \frac{3}{5} \cdot (-x+3) dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = 0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + 0 = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{3}{10} \cdot x^2 + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{10} & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{5} \cdot x^3 - \frac{3}{5} \cdot x^2 + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{10} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{10} \cdot x^2 + \frac{9}{5} \cdot x - \frac{17}{10} & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

► Математическое ожидание

$$M_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \frac{3}{5} \cdot \left[\int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0 dx + \int_{-1}^0 x \cdot (x+1) dx + \int_0^2 x \cdot (x-1)^2 dx + \int_2^3 x \cdot (-x+3) dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx \right] =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \left(0 - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{7}{6} + 0 \right) = 1$$

Дисперсия

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X)^2 \cdot p(x) dx =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \left[\int_{-1}^0 (x-1)^2 \cdot (x+1) dx + \int_0^2 (x-1)^2 \cdot (x-1)^2 dx + \int_2^3 (x-1)^2 \cdot (-x+3) dx \right] =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{11}{12} + \frac{2}{5} + \frac{11}{12} \right) = \frac{67}{50} = 1,34$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D_X} = \sqrt{1,34} \approx 1,158$$

► График плотности распределения непрерывной с.в. X :

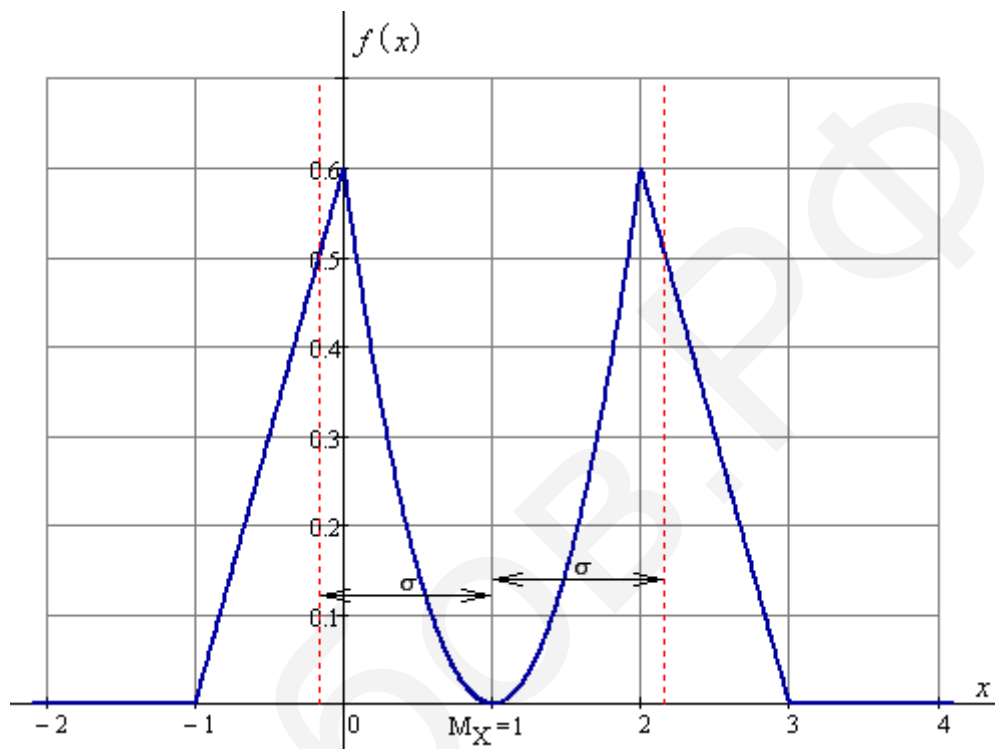
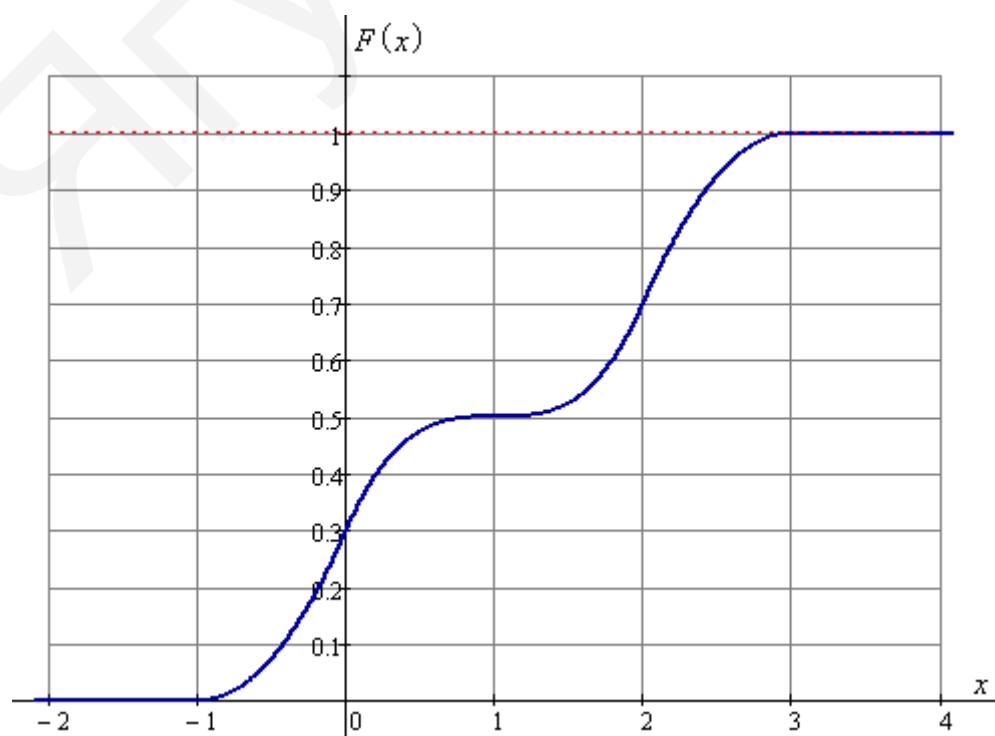


График интегральной функции распределения непрерывной с.в. X :



Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике", 2004;
- 2) Гусак А.А., Бричкова Е.А. "Теория вероятностей", 2006, стр. 109 (примеры 5, 6).

6) Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ a \sin 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр a ;

б) выражение для функции распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$f(x)$ - плотность распределения (плотность распределения вероятностей, плотность, дифференциальная функция распределения) случайной величины X ; $f(x) = F'(x)$.

$F(x)$ - функция распределения (функция распределения вероятностей, интегральная функция распределения) случайной величины X ; $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

a)

Параметр a (постоянную нормировки) найдём из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} a \cdot \sin 3x dx = \frac{a}{3} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 3x d(3x) = \frac{a}{3} \cdot (-\cos 3x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{a}{3} \cdot \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{a}{3} \cdot (-1 - 0) = \frac{a}{3} = 1$$

- следовательно, $a = 3$.

И плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ 3 \sin 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

б)

Используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Если $x \leq \frac{\pi}{6}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 dx + \int_{\pi/6}^x 3 \sin 3x dx = 0 + (-\cos 3x) \Big|_{\pi/6}^x = -\cos 3x - \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 3x.$$

Если $x > \frac{\pi}{3}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \sin 3x dx + \int_{\pi/3}^x 0 dx = 0 + 1 + 0 = 1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ -\cos 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

в)

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$:

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = -\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - 0 = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

График плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ 3 \sin 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

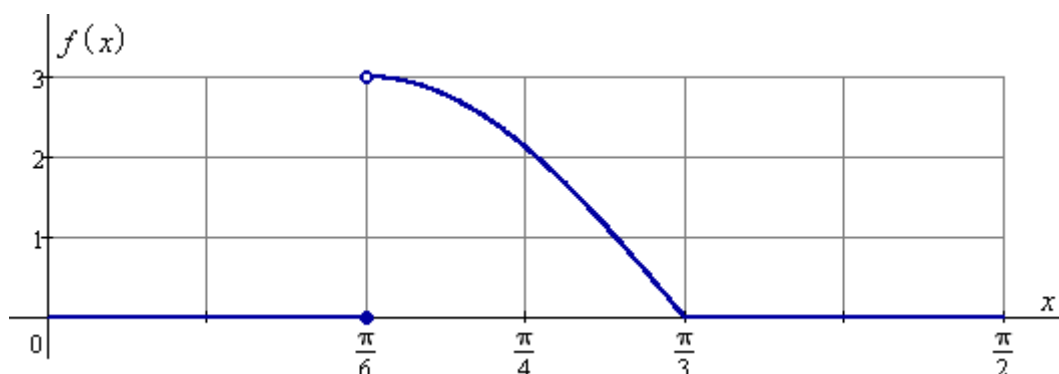


График функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ -\cos 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

