Формула полной вероятности.

1) Качество изготовляемых деталей проверяется двумя контролёрами. Вероятность попадания детали к первому контролёру равна 0,6, ко второму 0,4. Вероятность считать деталь качественной для первого контролёра 0,95, для второго 0,92. Найти вероятность того, что случайно выбранная деталь признана стандартной.

Обозначим событие:

A - случайно выбранная деталь признана стандартной.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - эта деталь проверялась 1-м контролёром, $P(H_1)=0,6$;

H_2 - эта деталь проверялась 2-м контролёром, $P(H_2)=0,4$.

Известны условные вероятности:

$P(A/H_1)=0,95$

$P(A/H_2)=0,92$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=0,6\cdot 0,95+0,4\cdot 0,92=0,938$$

Ответ: $P(A)=0,938$

2) Имеются две партии деталей. В одной партии все детали качественные, во второй 1/4 деталей бракованные. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь из наугад выбранной партии - качественная.

Обозначим событие:

A - наугад взятая деталь из наугад выбранной партии - качественная.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - эта деталь извлечена из 1-й партии, $P(H_1)=1/2$;

H_2 - эта деталь извлечена из 2-й партии, $P(H_2)=1/2$.

Известны условные вероятности:

$P(A/H_1)=1$

$P(A/H_2)=3/4$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$$

Ответ: $P(A)=7/8$

3) В каждом ящике содержится по 3 чёрных, 5 белых и 8 красных шаров. Из первого ящика наудачу извлечён один шар и переложен во второй ящик. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из второго ящика, будет не чёрным.

Обозначим событие:

A - шар, извлечённый из второго ящика (после перекладывания), будет не чёрным.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - при перекладывании из 1-го ящика был извлечён чёрный шар, $P(H_1)=\frac{3}{3+5+8}=\frac{3}{16}$;

H_2 - при перекладывании из 1-го ящика был извлечён белый шар, $P(H_2)=\frac{5}{3+5+8}=\frac{5}{16}$;

H_3 - при перекладывании из 1-го ящика был извлечён красный шар, $P(H_3)=\frac{8}{3+5+8}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

(события H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий)

Условные вероятности:

$$P(A/H_1)=\frac{5+8}{4+5+8}=\frac{13}{17};$$

$$P(A/H_2)=\frac{6+8}{3+6+8}=\frac{14}{17};$$

$$P(A/H_3)=\frac{5+9}{3+5+9}=\frac{14}{17}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=\frac{13}{17}\cdot\frac{3}{16}+\frac{14}{17}\cdot\frac{5}{16}+\frac{14}{17}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{16}=0,8125$$

Ответ: $P(A)=\frac{13}{16}=0,8125$.

4) В урну, содержащую 3 шара, опущен белый шар, после чего наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что он белый, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Обозначим событие:

A - из урны извлечён белый шар.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - в урне были 3 белых шара, $P(H_1)=1/4$;

H_2 - в урне были 1 чёрный и 2 белых шара, $P(H_2)=1/4$;

H_3 - в урне были 2 чёрных и 1 белый шар, $P(H_3)=1/4$;

H_4 - в урне были 3 чёрных шара, $P(H_4)=1/4$.

Условные вероятности:

$$P(A/H_1)=4/4=1;$$

$$P(A/H_2)=3/4;$$

$$P(A/H_3)=2/4=1/2;$$

$$P(A/H_4)=1/4.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0,625$$

Ответ: $P(A)=0,625$.

5) Из партии деталей, среди которых 10 штук доброкачественных и 6 бракованных, для контроля наудачу взято 10 штук. При контроле оказалось, что первые 4 детали доброкачественные. Найти вероятность того, что следующая взятая деталь доброкачественная.

Обозначим событие:

A - следующая взятая деталь доброкачественная.

Первые 4 детали доброкачественные, их можно сразу вывести из игры. Рассматриваем партию деталей, содержащую 6 доброкачественных (д) и 6 бракованных (б) деталей. Из неё случайным образом извлекаются 6 деталей (4 доброкачественные детали уже извлекли). Уточним название события A:

A - 7-я извлекаемая деталь - доброкачественная.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 6д+0б, $P(H_1)=\dfrac{C_6^6\cdot C_6^0}{C_{12}^6}=\dfrac{1}{924}$;

H_2 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 5д+1б, $P(H_2)=\dfrac{C_6^5\cdot C_6^1}{C_{12}^6}=\dfrac{3}{77}$;

H_3 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 4д+2б, $P(H_3)=\dfrac{C_6^4\cdot C_6^2}{C_{12}^6}=\dfrac{75}{308}$;

H_4 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 3д+3б, $P(H_4)=\dfrac{C_6^3\cdot C_6^3}{C_{12}^6}=\dfrac{100}{231}$;

H_5 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 2д+4б, $P(H_5)=\dfrac{C_6^2\cdot C_6^4}{C_{12}^6}=\dfrac{75}{308}$;

H_6 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 1д+5б, $P(H_6)=\dfrac{C_6^1\cdot C_6^5}{C_{12}^6}=\dfrac{3}{77}$;

H_7 - среди предыдущих извлечённых 6 деталей - 0д+6б, $P(H_7)=\dfrac{C_6^0\cdot C_6^6}{C_{12}^6}=\dfrac{1}{924}$;

(эти события составляют полную группу событий: $2\cdot\left(\dfrac{1}{924}+\dfrac{3}{77}+\dfrac{75}{308}\right)+\dfrac{100}{231}=1$)

Вычислим условные вероятности:

$$P(A\setminus H_1)=\frac{6-6}{0+6}=0$$

$$P(A\setminus H_2)=\frac{6-5}{1+5}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\setminus H_3)=\frac{6-4}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\setminus H_4)=\frac{6-3}{3+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\setminus H_5)=\frac{6-2}{4+2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P(A\backslash H_6)=\frac{6-1}{5+1}=\frac{5}{6}$$

$$P(A\backslash H_7)=\frac{6-0}{6+0}=1$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{7}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=0\cdot\frac{1}{924}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{77}+\frac{1}{3}\cdot\frac{75}{308}+\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{231}+\frac{2}{3}\cdot\frac{75}{308}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{77}+1\cdot\frac{1}{924}=\frac{1}{2}=0,5$$

Ответ: $P(A)=0,5$.

6) В первой урне находятся 3 белых и 7 чёрных шаров, а во второй - 6 белых и 4 чёрных. Из первой наугад вынимается шар и перекладывается во вторую, шары в ней перемешиваются, и случайно выбранный шар перекладывается в первую урну. Какова теперь вероятность вынуть из первой урны чёрный шар ?

Обозначим событие:

A - после второго перекладывания из 1-й урны вынимается чёрный шар.

Сформулируем гипотезы:

A_1 - при 1-м перекладывании из 1-й урны был извлечён белый шар;

B_1 - при 1-м перекладывании из 1-й урны был извлечён чёрный шар;

A_2 - при 2-м перекладывании из 2-й урны был извлечён белый шар;

B_2 - при 2-м перекладывании из 2-й урны был извлечён чёрный шар.

Вероятности событий при 1-м перекладывании:

$$P(A_1)=\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10},$$

$$P(B_1)=\frac{7}{3+7}=\frac{7}{10}.$$

Условные вероятности при 2-м перекладывании:

$P(A_2/A_1)=\frac{6+1}{(6+1)+4}=\frac{7}{11}$ (теперь в 1-й урне 3 белых и 7 чёрных),

$P(A_2/B_1)=\frac{6}{6+(4+1)}=\frac{6}{11}$ (теперь в 1-й урне 4 белых и 6 чёрных),

$P(B_2/A_1)=\frac{4}{(6+1)+4}=\frac{4}{11}$ (теперь в 1-й урне 2 белых и 8 чёрных),

$P(B_2/B_1)=\frac{4+1}{6+(4+1)}=\frac{5}{11}$ (теперь в 1-й урне 3 белых и 7 чёрных).

Условные вероятности при извлечения чёрного шара из 1-й урны после 2-го перекладывания:

$$P(A/(A_2\cdot A_1))=\frac{7}{10},$$

$$P(A/(A_2\cdot B_1))=\frac{6}{10},$$

$$P(A/(B_2\cdot A_1))=\frac{8}{10},$$

$$P(A/(B_2\cdot B_1))=\frac{7}{10}.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P\left(A/\left(A_2\cdot A_1\right)\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)+P\left(A/\left(A_2\cdot B_1\right)\right)\cdot P\left(A_2/B_1\right)\cdot P\left(B_1\right)+$$
$$+P\left(A/\left(B_2\cdot A_1\right)\right)\cdot P\left(B_2/A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)+P\left(A/\left(B_2\cdot B_1\right)\right)\cdot P\left(B_2/B_1\right)\cdot P\left(B_1\right)=$$
$$=\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{10}=\frac{147+252+96+245}{1100}=\frac{37}{55}\approx 0,673$$

Ответ: $P(A)=\frac{37}{55}\approx 0,673$

Формула Байеса.

7) На контроль поступают одинаковые блюда, изготовленные двумя поварами. Производительность первого повара вдвое больше, чем второго. Процент брака у первого 0.08, а у второго - 0.06. Проверенное блюдо не удовлетворяет требованиям контроля. Найти вероятность того, что блюдо приготовлено первым поваром.

Обозначим событие:

A - проверенное блюдо не удовлетворяет требованиям контроля.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - блюдо приготовлено первым поваром, $P\left(H_1\right)=2/3$;

H_2 - блюдо приготовлено вторым поваром, $P\left(H_2\right)=1/3$.

Условные вероятности:

$P\left(A/H_1\right)=0,08$;

$P\left(A/H_2\right)=0,06$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P\left(A/H_i\right)\cdot P\left(H_i\right)=0,08\cdot\frac{2}{3}+0,06\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{150}$$

- вероятность того, что проверенное блюдо будет признано некачественным.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_1):

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{2}{3}\cdot 0,08\right)}{\left(\frac{11}{150}\right)}=\frac{8}{11}\approx 0,727$$

Ответ: $P\left(H_1/A\right)=\frac{8}{11}\approx 0,727$.

8) Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 4:1. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,2; для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъезжала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

Обозначим событие:

A - машина заехала на заправку.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - это грузовая машина, $P(H_1)=\frac{4}{5}=0,8$;

H_2 - это легковая машина, $P(H_2)=\frac{1}{5}=0,2$.

Условные вероятности:

$P(A/H_1)=0,2$

$P(A/H_2)=0,3$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=0,2\cdot 0,8+0,3\cdot 0,2=0,22$$

- вероятность того, что случайным образом выбранная из общего потока машина зарулит на бензоколонку.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_1):

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)}=\frac{0,2\cdot 0,8}{0,22}=\frac{8}{11}\approx 0,727$$

Ответ: $P(H_1/A)=\frac{8}{11}\approx 0,727$.

9) На хим. заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0.95, звуковой сигнал может срабатывать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0.05, реальная вероятность аварийной ситуации равна 0.004. Предположим, звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации ?

Обозначим событие:

A - срабатывание системы аварийной сигнализации (срабатывание звукового сигнала).

Сформулируем гипотезы:

H_1 - на заводе возникла аварийная ситуация, $P(H_1)=0,004$;

H_2 - на заводе всё нормально, $P(H_2)=1-0,004=0,996$.

(заметим, что события гипотез всегда составляют полную группу событий, и $P(H_1)+P(H_2)=1$)

Условные вероятности:

$P(A/H_1)=0,95$;

$P(A/H_2)=0,05$.

(а вот здесь сумма вероятностей равна 1 по случайному стечению обстоятельств)

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=0,95\cdot 0,004+0,05\cdot 0,996=0,0536$$

- вероятность того, что звуковая сигнализация сработает.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_1):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,004 \cdot 0,95}{0,0536} = \frac{19}{268} \approx 0,071$$

- вероятность того, что на заводе возникла аварийная ситуация, если сработала звуковая аварийная сигнализация.

Ответ: $P(H_1/A) = \frac{19}{268} \approx 0,071$.

10) Три студентки живут в одной комнате и по очереди моют посуду. Вероятность разбить тарелку для первой студентки равна 0.03, для второй 0.01, для третьей - 0.04. На кухне раздался звон разбитой тарелки. Найти вероятность того, что третья студентка мыла тарелку.

Обозначим событие:

A - разбили тарелку.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - тарелку разбила 1-я студентка, $P(H_1) = 0,03$;

H_2 - тарелку разбила 2-я студентка, $P(H_2) = 0,01$;

H_3 - тарелку разбила 3-я студентка, $P(H_3) = 0,04$.

Условные вероятности (кто мыл посуду в момент катастрофы):

$$P(A/H_1) = \frac{1}{3};$$

$$P(A/H_2) = \frac{1}{3};$$

$$P(A/H_3) = \frac{1}{3}$$

(события H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий)

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A/H_i) \cdot P(H_i) = \frac{1}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 = \frac{2}{75}$$

- вероятность того, что в процессе мытья посуды будет разбита тарелка.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_3):

$$P(H_3/A) = \frac{P(A/H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 0,04\right)}{\left(\frac{2}{75}\right)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: $P(H_3/A) = 0,5$.

11) Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.8, для второго - 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.

Обозначим событие:

A - в результате залпа мишень поражена одним стрелком.

Сформулируем гипотезы:

H_0 - все промахнулись;

H_1 - в мишень попал 1-й стрелок, $P(H_1)=0,8\cdot(1-0,4)=0,48$;

H_2 - в мишень попал 2-й стрелок, $P(H_2)=(1-0,8)\cdot 0,4=0,08$;

H_3 - все попали

(события H_i составляют полную группу событий).

Условные вероятности:

$P(A/H_0)=0$

$P(A/H_1)=1$

$P(A/H_2)=1$

$P(A/H_3)=0$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=0+1\cdot 0,48+1\cdot 0,08+0=0,56$$

- вероятность того, что мишень поражена одним стрелком (после залпа в мишени одна пробоина).

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_2):

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,08\cdot 1}{0,56}=\frac{1}{7}\approx 0,143$$

- вероятность того, что в мишень попал второй стрелок, если в мишени обнаружена одна пробоина.

Ответ: $P(H_1/A)=\frac{1}{7}\approx 0,143$.

Литература:

1) Гмурман В.Е. "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике", 2005, стр. 35 (задача 106).

12) Три орудия сделали залп по цели. Два орудия попали в цель. Найти вероятность того, что 1-е орудие попало в цель, если вероятности попадания в цель для орудий соответственно равны 0.1, 0.9, 0.95.

1-й способ решения.

Обозначим событие:

A - два орудия попали в цель;

A_1 - 1-е орудие попало в цель, $P(A_1)=0,1$;

A_2 - 2-е орудие попало в цель, $P(A_2)=0,9$;

A_3 - 3-е орудие попало в цель, $P(A_3)=0,95$.

Заметим, что события A_1, A_2, A_3 независимы, поэтому к их вероятностям применима теорема умножения вероятностей независимых событий; а события $A_1\cdot A_2$, $A_1\cdot A_3$ и $A_2\cdot A_3$ - несовместные, и к их вероятностям применима теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - 1-е орудие попало в цель, $P(H_1)=0,1$ (по условию задачи);

H_2 - 1-е орудие не попало в цель, $P(H_2)=1-0,1=0,9$.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}$$

Вычислим условные вероятности для событий

$A/H_1=\bar{A}_2\cdot A_3+A_2\cdot\bar{A}_3$ - произошло два попадания в цель, причём 1-е орудие попало в цель:

$$P(A/H_1)=P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)=(1-0,9)\cdot 0,95+0,9\cdot(1-0,95)=0,14;$$

$A/H_2=A_2\cdot A_3$ - произошло два попадания в цель, причём 1-е орудие не попало в цель:

$$P(A/H_2)=P(A_2)\cdot P(A_3)=0,9\cdot 0,95=0,855.$$

Тогда

$$P(H_1/A)=\frac{0,1\cdot 0,14}{0,1\cdot 0,14+0,9\cdot 0,855}=\frac{28}{1567}\approx 0,018.$$

Ответ: $P(H_1/A)=\frac{28}{1567}\approx 0,018$.

Литература:

1) Семенчин Е.А. "Теория вероятностей в примерах и задачах", 2007, стр. 55 (пример 2).

2-й способ решения.

Обозначим событие:

A - два орудия попали в цель;

A_1 - 1-е орудие попало в цель, $P(A_1)=0,1$;

A_2 - 2-е орудие попало в цель, $P(A_2)=0,9$;

A_3 - 3-е орудие попало в цель, $P(A_3)=0,95$.

Заметим, что события A_1, A_2, A_3 независимы, поэтому к их вероятностям применима теорема умножения вероятностей независимых событий; а события $A_1\cdot A_2$, $A_1\cdot A_3$ и $A_2\cdot A_3$ - несовместные, и к их вероятностям применима теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - все промазали, $P(H_1)=0,9\cdot 0,1\cdot 0,05=0,0045$;

H_2 - 1-е орудие попало в цель, остальные промазали, $P(H_2)=0,1\cdot 0,1\cdot 0,05=0,0005$;

H_3 - 2-е орудие попало в цель, остальные промазали, $P(H_3)=0,9\cdot 0,9\cdot 0,05=0,0405$;

H_4 - 3-е орудие попало в цель, остальные промазали, $P(H_4)=0,9\cdot 0,1\cdot 0,95=0,0855$;

H_5 - 1 и 2-е орудия попали в цель, 3-е промазало, $P(H_5)=0,1\cdot 0,9\cdot 0,05=0,0045$;

H_6 - 1 и 3-е орудия попали в цель, 2-е промазало, $P(H_6)=0,1\cdot 0,1\cdot 0,95=0,0095$;

H_7 - 2 и 3-е орудия попали в цель, 1-е промазало, $P(H_7)=0,9\cdot 0,9\cdot 0,95=0,7695$;

H_8 - все попали, $P(H_8)=0,1\cdot 0,9\cdot 0,95=0,0855$

(события H_i составляют полную группу событий).

Условные вероятности:

$$P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=P(A/H_4)=0$$

$$P(A/H_5)=P(A/H_6)=P(A/H_7)=1$$

$$P(A/H_8)=0$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{8}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=0,0045+0,0095+0,7695=0,7835$$

- вероятность того, что мишень поражена двумя орудиями (после залпа в мишени две пробоины).

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_1):

$$P(H_5/A+H_6/A)=\frac{P(A/H_5)\cdot P(H_5)+P(A/H_6)\cdot P(H_6)}{P(A)}=\frac{1\cdot 0,0045+1\cdot 0,0095}{0,7835}=\frac{28}{1567}\approx 0,0179$$

- вероятность того, что в мишень попало 1-е орудие, если в мишени обнаружены две пробоины.

Ответ: $P(H_5/A+H_6/A)=\dfrac{28}{1567}\approx 0,018$.

13) Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа первого элемента равна 0.3, второго - 0.6. Найдите вероятность того, что не отказал первый элемент, если известно, что какой-то один из элементов отказал ?

Обозначим события:

A - какой-то один из элементов отказал.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - не отказал 1-й элемент, $P(H_1)=0,7\cdot 0,6=0,42$;

H_2 - не отказал 2-й элемент, $P(H_2)=0,3\cdot 0,4=0,12$;

H_3 - оба элемента не отказали, $P(H_3)=0,7\cdot 0,4=0,28$;

H_4 - отказали оба элемента, $P(H_4)=0,3\cdot 0,6=0,18$.

Условные вероятности:

$$P(A/H_1)=1,$$

$$P(A/H_2)=1,$$

$$P(A/H_3)=0,$$

$$P(A/H_4)=0.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A/H_i)\cdot P(H_i)=1\cdot 0,42+1\cdot 0,12+0\cdot 0,28+0\cdot 0,18=0,54$$

- вероятность того, что какой-то один из элементов отказал.

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_1):

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,42\cdot 1}{0,54}=\frac{7}{9}\approx 0,778$$

Ответ: $P(H_1/A)=\dfrac{7}{9}\approx 0,778$.

Литература:
1) Кремер Н.Ш. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2006, стр. 55 (пример 1.36).

14) По линии связи могут быть переданы символы $A,\ B,\ C$. Вероятность передачи символа A равна $p_1 = 0,3$; символа B - $p_2 = 0,2$; символа C - $p_3 = 0,5$. Вероятности искажения при передаче символов $A,\ B,\ C$ равны соответственно $q_1 = 0,04,\ q_2 = 0,01,\ q_3 = 0,07$. Установлено, что сигнал из двух символов принят без искажения. Чему равна вероятность, что передавался сигнал AB ?

Обозначим событие:

A - были переданы два символа без искажений.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - это были символы AA, $P(H_1) = p_1 \cdot p_1 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$;

H_2 - это были символы AB, $P(H_2) = p_1 \cdot p_2 = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$;

H_3 - это были символы BA, $P(H_3) = p_2 \cdot p_1 = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$;

H_4 - это были символы AC, $P(H_4) = p_1 \cdot p_3 = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$;

H_5 - это были символы CA, $P(H_5) = p_3 \cdot p_1 = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$;

H_6 - это были символы BB, $P(H_6) = p_2 \cdot p_2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$;

H_7 - это были символы BC, $P(H_7) = p_2 \cdot p_3 = 0,2 \cdot 0,5 = 0,10$;

H_8 - это были символы CB, $P(H_8) = p_3 \cdot p_2 = 0,5 \cdot 0,2 = 0,10$;

H_9 - это были символы CC, $P(H_9) = p_3 \cdot p_3 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

События H_1 ... H_9 составляют полную группу событий:

$$0,09 + 0,06 + 0,06 + 0,15 + 0,15 + 0,04 + 0,1 + 0,1 + 0,25 = 1$$

Условные вероятности:

$$P(A/H_1) = (1-0,04)\cdot(1-0,04) = 0,96 \cdot 0,96 = 0,9216$$

$$P(A/H_2) = (1-0,04)\cdot(1-0,01) = 0,96 \cdot 0,99 = 0,9504$$

$$P(A/H_3) = (1-0,01)\cdot(1-0,04) = 0,99 \cdot 0,96 = 0,9504$$

$$P(A/H_4) = (1-0,04)\cdot(1-0,07) = 0,96 \cdot 0,93 = 0,8928$$

$$P(A/H_5) = (1-0,07)\cdot(1-0,04) = 0,93 \cdot 0,96 = 0,8928$$

$$P(A/H_6) = (1-0,01)\cdot(1-0,01) = 0,99 \cdot 0,99 = 0,9801$$

$$P(A/H_7) = (1-0,01)\cdot(1-0,07) = 0,99 \cdot 0,93 = 0,9207$$

$$P(A/H_8) = (1-0,07)\cdot(1-0,01) = 0,93 \cdot 0,99 = 0,9207$$

$$P(A/H_9) = (1-0,07)\cdot(1-0,07) = 0,93 \cdot 0,93 = 0,8649$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{9} P(H_i)\cdot P(A/H_i) = 0,09 \cdot 0,9216 + 0,06 \cdot 0,9504 + 0,06 \cdot 0,9504 + 0,15 \cdot 0,8928 +$$

$$+0,15 \cdot 0,8928 + 0,04 \cdot 0,9801 + 0,1 \cdot 0,9207 + 0,1 \cdot 0,9207 + 0,25 \cdot 0,8649 = 0,904401$$

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса (переоценка вероятности события H_2):

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,06\cdot 0,9504}{0,904401}=\frac{63360}{100489}\approx 0,631$$

- вероятность того, что передавался сигнал AB, если сигнал из двух символов принят без искажения.

Ответ: $P(H_2/A)\approx 0,631$.

Совместное использование формулы полной вероятности и формулы Бернулли.

15) Каждое изделие в партии изготовлено на одном из двух станков. Вероятность брака на одном станке равна 0.04, на другом - 0.08. Найти вероятность того, что из 10 изделий, изготовленных по 5 на каждом станке, будет не менее 9 годных.

► Обозначим событие:

A - одно случайно выбранное из партии изделие является годным.

Сформулируем гипотезы:

H_1 - это изделие изготовлено на 1-м станке, $P(H_1)=0,5$;

H_2 - это изделие изготовлено на 2-м станке, $P(H_2)=0,5$.

Известны условные вероятности:

$$P(A/H_1)=1-0,04=0,96$$

$$P(A/H_2)=1-0,08=0,92$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=0,5\cdot 0,96+0,5\cdot 0,92=0,94$$

► Теперь обозначим событие:

A - из 10 изделий, изготовленных по 5 на каждом станке, будет не менее 9 годных (т.е годных изделий будет 9 или 10).

Условия задачи соответствуют схеме Бернулли, и вычисления производим по формуле Бернулли

$$P_m(n)=C_m^n\cdot p^n\cdot q^{m-n}$$

Искомая вероятность

$$P(A)=P_{10}(9)+P_{10}(10)=C_{10}^{9}\cdot p^9\cdot q^{10-9}+C_{10}^{10}\cdot p^{10}\cdot q^{10-10}=$$

$$=10\cdot 0,94^9\cdot(1-0,94)^1+1\cdot 0,94^{10}\cdot(1-0,94)^0=10\cdot 0,94^9\cdot 0,06+0,94^{10}=$$

$$=0,94^9\cdot(0,6+0,94)\approx 0,88241$$

Ответ: $P(A)\approx 0,88241$.