1) Сколько существует трёхзначных натуральных чисел, у которых только две цифры меньше пяти ?

1-й способ решения.

Цифр, меньших 5, всего пять: $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Остальные пять цифр не меньше 5: $\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.

Множество трёхзначных натуральных чисел начинается с числа 100 и заканчивается числом 999.

В решении задачи используем:

Правило произведения (1-е основное правило комбинаторики). Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов $(A,\ B)$ в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Правило суммы (2-е основное правило комбинаторики). Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Чтобы составить требуемое трёхзначное натуральное число:

в качестве 1-й цифры можем использовать любую цифру от 1 до 4 - таких цифр 4,
в качестве 2-й цифры можем использовать любую цифру от 0 до 4 - таких цифр 5,
в качестве 3-й цифры можем использовать любую цифру от 5 до 9 - таких цифр 5;

или

в качестве 1-й цифры можем использовать любую цифру от 1 до 4 - таких цифр 4,
в качестве 2-й цифры можем использовать любую цифру от 5 до 9 - таких цифр 5,
в качестве 3-й цифры можем использовать любую цифру от 0 до 4 - таких цифр 5;

или

в качестве 1-й цифры можем использовать любую цифру от 5 до 9 - таких цифр 5,
в качестве 2-й цифры можем использовать любую цифру от 0 до 4 - таких цифр 5,
в качестве 3-й цифры можем использовать любую цифру от 0 до 4 - таких цифр 5.

Используя правило суммы и правило произведения, вычислим искомое количество:

$$n = 4 \cdot 5 \cdot \mathbf{5} + 4 \cdot \mathbf{5} \cdot 5 + \mathbf{5} \cdot 5 \cdot 5 = 325$$

Ответ: $n = 325$.

2-й способ решения.

Поскольку множество M трёхзначных натуральных чисел начинается с числа 100:

$$M = \{m:\ m \in N\ ,\ \ 100 \le m \le 999\},$$

то первая цифра числа не может быть 0.

Обозначим множество, состоящее из цифр, меньших 5, но не содержащее цифру 0, через A:

$$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}, \qquad |A| = 4;$$

множество, состоящее из цифр, меньших 5, через B:

$$B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}, \quad |B| = 5;$$

множество, состоящее из цифр, не меньших 5, через C:

$$C = \{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}, \quad |C| = 5.$$

Номера требуемого вида являются кортежами длины 3, полученные объединением декартовых произведений

$$A \times B \times C \ \cup\ A \times C \times B \ \cup\ C \times B \times B.$$

Следовательно,

$$|A \times B \times C \ \cup\ A \times C \times B \ \cup\ C \times B \times B| = |A \times B \times C| + |A \times C \times B| + |C \times B \times B| =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 325$$

Ответ: $n = 325$.

Литература:
1) Гмурман В.Е. "Теория вероятностей и математическая статистика", 2005, стр. 23;
2) Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. "Конспект лекций по дискретной математике", 2007, стр. 60, стр. 65 (задача 10).

2) В два почтовых отделения отправлена почта. Найти вероятность того, что хотя бы одно отделение получит почту вовремя, если вероятность получения вовремя для каждого отделения $0,9$.

1-й способ решения

*Теорема сложения вероятностей двух **совместных** событий.*
Вероятность суммы двух событий (т.е хотя бы одного из двух совместных событий) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Обозначим события:

A - первое отделение получит почту вовремя,
B - второе отделение получит почту вовремя,
C - хотя бы одно отделение получит почту вовремя.

Очевидно, $A+B=C$, причём события A и B совместны. Следовательно,

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

В то же время, события A и B независимы, поэтому

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0,9+0,9-0,9\cdot 0,9=0,99.$$

2-й способ решения

*Вероятность появления хотя бы одного **независимого** события.*
Пусть события A_1, A_2, ... , A_n независимы в совокупности, причём $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, ... , $P(A_n)=p_n$; пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.
Тогда вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ... , A_n, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... , $\overline{A}_n$:

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Обозначим события:

A_1 - первое отделение получит почту вовремя,

A_2 - второе отделение получит почту вовремя,

A - хотя бы одно отделение получит почту вовремя.

События A_1 и A_2 независимы. Поэтому вероятность того, что произойдёт хотя бы одно из них (событие A), равна

$$P(A)=1-0,1\cdot 0,1=1-0,01=0,99$$

3) Ученик получает оценку от 2 до 5 баллов. Вероятность того, что ему поставят 4, 3, 2 соответственно равны 0,45, 0,23 и 0,09. Определить вероятность того, что ученик получит 5.

Обозначим вероятности получения оценок 5, 4, 3, 2 как P_5, P_4, P_3, P_2. Заметим, что соответствующие им события несовместны, а совокупность всех событий образует полную группу (является событием достоверным) и, следовательно, имеет вероятность, равную 1. Поэтому

$$P_5 + P_4 + P_3 + P_2 = 1$$

$$P_5 = 1 - P_4 - P_3 - P_2$$

$$P_5 = 1 - 0,45 - 0,23 - 0,09 = 0,23$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.
Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1.

Литература:

1) Гмурман В.Е. "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике", 2005, стр. 19, 29;
2) Гусак А.А., Бричикова Е.А. "Теория вероятностей", 2003, стр. 50, стр. 54 (пример 5).

4) Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на 1-й и 2-й вопросы одинакова и равна 0,9 , на 3-й - 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит:
а) на все вопросы,
б) по крайней мере на 2 вопроса.

Обозначим события:

A_1 - дан правильный ответ на 1-й вопрос билета, $P(A_1) = 0,9$;

A_2 - дан правильный ответ на 2-й вопрос билета, $P(A_2) = 0,9$;

A_3 - дан правильный ответ на 3-й вопрос билета, $P(A_3) = 0,8$.

а) События, заключающиеся в правильных ответах на вопросы билета, независимы, поэтому применима теорема умножения вероятностей независимых событий.

*Теорема умножения вероятностей двух **независимых** событий.*

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,648$$

б) "По крайней мере на два" означает "≥ 2". Поэтому нам интересны события $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$ и $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$, которые несовместны. Для несовместных событий применима теорема сложения вероятностей несовместных событий.

*Теорема сложения вероятностей двух **несовместных** событий.*

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие.

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(A_1+A_2+\ldots+A_n\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots+P\left(A_n\right).$$

$$P=P\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3\right)+P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\right)=$$

$$=0,9\cdot 0,9\cdot 0,8+0,1\cdot 0,9\cdot 0,8+0,9\cdot 0,1\cdot 0,8+0,9\cdot 0,9\cdot 0,2=$$

$$=0,648+0,072+0,072+0,162=0,954$$

5) На складе имеется 10 телевизоров, из которых 2 неисправных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад трёх телевизоров хотя бы один будет неисправным ?

1-й способ решения

События A (хотя бы один из взятых трёх телевизоров будет неисправным) и $\overline{A}$ (ни один из взятых телевизоров не является неисправным) - противоположные, поэтому $P(A)+P(\overline{A})=1$ (сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице). Отсюда $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Вероятность появления события $\overline{A}$ (ни один из взятых телевизоров не является неисправным):

$$P(\overline{A})=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{8!}{3!\cdot(8-3)!}\cdot\frac{3!\cdot(10-3)!}{10!}=\frac{6\cdot 7}{9\cdot 10}=\frac{7}{15}$$

Искомая вероятность

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}\approx 0,53$$

2-й способ решения

Из трёх взятых телевизоров хотя бы один будет неисправным (событие A), если произойдёт любое из следующих двух несовместных событий:

B - неисправен один телевизор,

C - неисправны два телевизора.

Событие A является суммой событий B и C; а поскольку события несовместны, то

$$P(A)=P(B)+P(C)$$

Вероятности событий B и C найдём по формуле, описывающей гипергеометрический закон распределения случайной величины:

$$P_k=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

(вероятность обнаружения k красных карандашей среди m извлечённых наудачу из коробки, если в коробке N карандашей, среди которых красных n). В нашем случае $N=10$, $n=2$, $k=1,2$, $m=3$, и, следовательно,

$$P(B)=\frac{C_2^1\cdot C_{10-2}^{3-1}}{C_{10}^3}=\frac{C_2^1\cdot C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{2!}{1!\cdot(2-1)!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot(8-2)!}\cdot\frac{3!\cdot(10-3)!}{10!}=\frac{7}{15}$$

$$P(C)=\frac{C_2^2\cdot C_{10-2}^{3-2}}{C_{10}^3}=\frac{1\cdot C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{8!}{1!\cdot(8-1)!}\cdot\frac{3!\cdot(10-3)!}{10!}=\frac{1}{15}$$

$$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}\approx 0,53$$

Литература:

1) Гмурман В.Е. "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике", 2005, стр. 20 (задачи 46, 47);
2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике", 2004, стр. 36 (пример 1.24);
3) Гусак А.А., Бричикова Е.А. "Теория вероятностей", 2003, стр. 49 (задача 2).

6) Мишень - круг и два концетрических кольца с номерами 1 и 2. Попадание в круг оценивается в +10 очков, в кольцо №1: +5 очков, в кольцо №2: -1 очко. Вероятность попадания в круг, кольцо №1 и №2 - соответственно 0,5 , 0,3 , 0,2. Построить закон распределения случайной величины X , имеющей смысл "сумма выбитых очков при двух выстрелах".

Обозначим события

A_0 - попадание в круг, $P(A_0)=0,5$;

A_1 - попадание в кольцо №1, $P(A_1)=0,3$;

A_2 - попадание в кольцо №2, $P(A_2)=0,2$.

События A_0A_0, A_1A_1, A_2A_2, A_0A_1, A_1A_0, A_0A_2, A_2A_0, A_1A_2, A_2A_1 составляют полную группу событий. Вычислим соответствующие вероятности.

Например, события, являющиеся исходами первого и второго выстрела, независимы; поэтому вероятность попасть при первом выстреле в круг, а при втором выстреле в 1-е кольцо, определим, используя теорему о произведении вероятностей независимых событий:

$$P(A_0A_0)=P(A_0)\cdot P(A_0)=0,5\cdot 0,5=0,25 \qquad (20\ очков)$$

$$P(A_1A_1)=P(A_1)\cdot P(A_1)=0,3\cdot 0,3=0,09 \qquad (10\ очков)$$

$$P(A_2A_2)=P(A_2)\cdot P(A_2)=0,2\cdot 0,2=0,04 \qquad (-2\ очка)$$

$$P(A_0A_1)=P(A_1A_0)=P(A_0)\cdot P(A_1)=0,5\cdot 0,3=0,15 \qquad (15\ очков)$$

$$P(A_0A_2)=P(A_2A_0)=P(A_0)\cdot P(A_2)=0,5\cdot 0,2=0,10 \qquad (9\ очков)$$

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_1)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,3\cdot 0,2=0,06 \qquad (4\ очка)$$

Построим закон распределения случайной величины X "сумма выбитых очков при двух выстрелах" (закон распределения дискретной случайной величины, заданный в виде таблицы, называется рядом распределения):

x_i	-2	4	9	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,20	0,09	0,30	0,25

(контроль: $0,04+0,12+0,2+0,09+0,3+0,25=1$)

7) В группе, состоящей из 25 студентов, спортивный разряд по борьбе имеют 10 человек, по стрельбе - 12. Вероятность того, что студент этой группы имеет разряды по обоим видам спорта, равна 0,32. Найдите вероятность того, что наугад выбранный студент имеет какой-нибудь разряд.

1-й способ решения

Обозначим события:

A - наугад выбранный студент имеет какой-нибудь разряд;

B - наугад выбранный студент имеет спортивный разряд по борьбе, $P(B)=\frac{10}{25}=0,40$;

C - наугад выбранный студент имеет спортивный разряд по стрельбе, $P(C)=\frac{12}{25}=0,48$.

Известна вероятность события $P(B\cdot C)=0,32$. По теореме сложения вероятностей событий:

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B\cdot C)=0,40+0,48-0,32=0,56.$$

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Литература:

1) Гусак А.А., Бричикова Е.А. "Теория вероятностей", 2006, стр. 50.

2-й способ решения

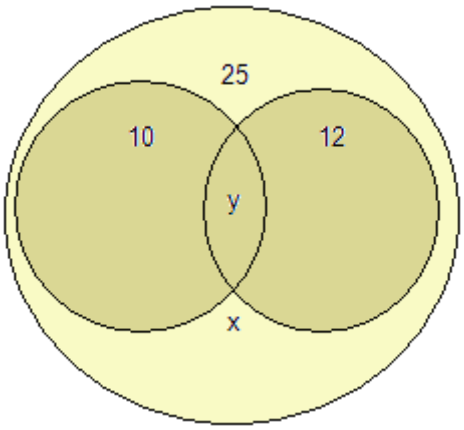
Обозначим событие:

A - наугад выбранный студент имеет какой-нибудь разряд.

Обозначим:

x - количество студентов, не имеющих никакого разряда;

y - количество студентов, имеющих одновременно оба разряда.



$$\begin{cases} x+10+12-y=25 \\ \frac{y}{25}=0,32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=11 \\ y=8 \end{cases}$$

По формуле классического определения вероятностей

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10+12-y}{25}=\frac{22-8}{25}=\frac{14}{25}=0,56$$

Ответ: $P(A)=0,56$.

8) Четверо человек играют в игру, где каждый может стать победителем с равной вероятностью. Какова вероятность того, что после четырёх игр каждый из них выиграет по одному разу ?

Обозначим событие:

A - после четырёх игр каждый из игроков выиграет по одному разу.

1-й способ решения

Заметим, что выигрыш одного игрока означает проигрыш трёх остальных; т.е. выигрыш каждого из игроков - события несовместные, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность того, что в 1-й игре выиграет 1-й игрок, равна 0,25; причём выиграть может вместо 1-го и 2-й, и 3-й, и 4-й. Всё равно кто-то выиграет, т.е. вероятность такого события

$$P_1 = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1$$

(выиграет или 1-й, или 2-й, или 3-й, или 4-й).

Чтобы каждый игрок выигрывал по одному разу, во 2-й игре уже должен выиграть кто-то из невыигравших ранее игроков, а таких вариантов осталось 3; вероятность такого события

$$P_2 = 0,25 + 0,25 + 0,25 = \frac{3}{4}$$

Аналогично, для 3-й игры:

$$P_3 = 0,25 + 0,25 = \frac{1}{2}$$

Для 4-й игры:

$$P_4 = 0,25 = \frac{1}{4}$$

Рассмотренные четыре события независимы, поэтому к их вероятностям применима теорема умножения вероятностей независимых событий. Искомая вероятность

$$P(A) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \approx 0,094$$

2-й способ решения

Общее число равновозможных исходов определяется числом размещений с повторениями

$$n = \overline{A}_g^k = \overline{A}_4^4 = 4^4 = 256 ,$$

где $g = 4$ - количество игроков, $k = 4$ - количество игр.

Число благоприятных исходов равно числу размещений из g элементов по k (без повторений), т.е.

$$n = A_g^k = A_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

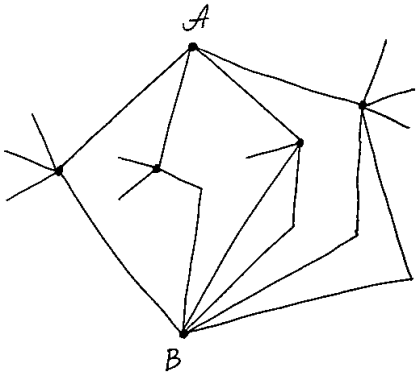
По формуле классического определения вероятностей

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \approx 0,094$$

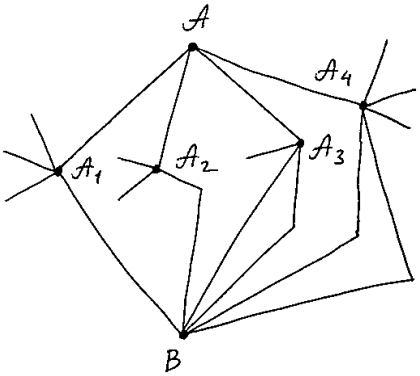
Литература:

1) Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. "Теория вероятностей. Задачи", 1969, стр. 14 (задача 1.32 - аналогичная).

9) На рисунке изображена возможная схема транспортировки груза из пункта A в пункт B. Какова вероятность того, что груз попадёт в пункт B, если маршрут выбирается наугад ?



Обозначим промежуточные пункты: A_1, A_2, A_3, A_4:



Обозначим события:

$P\left(AA_1B\right)$ - вероятность проехать по маршруту AA_1B,

$P\left(AA_2B\right)$ - вероятность проехать по маршруту AA_2B,

$P\left(AA_3B\right)$ - вероятность проехать по маршруту AA_3B,

$P\left(AA_4B\right)$ - вероятность проехать по маршруту AA_4B,

$P\left(AB\right)$ - вероятность попасть из пункта A в пункт B.

В начале движения:

вероятности выбора направления из A на A_1, из A на A_2, из A на A_3, из A на A_4 одинаковы и равны $\frac{1}{4}$.

При движении из промежуточного пункта:

вероятность выбора направления из A_1 на B равна $\frac{1}{4}$;

вероятность выбора направления из A_2 на B равна $\frac{1}{3}$;

вероятность выбора направления из A_3 на B равна $\frac{2}{3}$;

вероятность выбора направления из A_4 на B равна $\frac{2}{5}$.

Выбор направления, например, из A на A_1, и выбор направления из A_1 - события независимые, поэтому применима теорема умножения вероятностей независимых событий. Т.е. вероятность попасть из пункта A в пункт B через пункт A_1 равна

$$P\left(AA_1B\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4};$$

вероятность попасть из пункта A в пункт B через пункт A_2 равна

$$P\left(AA_2B\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3};$$

вероятность попасть из пункта A в пункт B через пункт A_3 равна

$$P\left(AA_3B\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3};$$

вероятность попасть из пункта A в пункт B через пункт A_4 равна

$$P\left(AA_4B\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}.$$

В тоже время события, заключающиеся в успешном достижении пункта В, через пункты A_1, A_2, A_3 и A_4 (соответственно маршруты AA_1B, AA_2B, AA_3B и AA_4B) - несовместные; для несовместных событий применима теорема сложения вероятностей несовместных событий, следовательно:

$$P\left(AB\right)=P\left(AA_1B\right)+P\left(AA_2B\right)+P\left(AA_3B\right)+P\left(AA_4B\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{33}{20}=\frac{33}{80}=0,4125$$