1) Найти три первых члена разложения решения ДУ в степенной ряд:

$$y'' = x \cdot y' - x \cdot y, \qquad y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 0.$$

Существует 2 способа решения ДУ с применением разложения решения в степенной ряд:
- способ последовательного дифференцирования,
- способ неопределённых коэффициентов.

1. Способ последовательного дифференцирования.

Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{y''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \ldots$$

Находим $y''(0)$, подставив $x = 0$ в исходное уравнение:

$$y''(0) = 0.$$

Последующие коэффициенты находим, дифференцируя заданное ДУ:

$$y''' = y' + x \cdot y'' - y - x \cdot y' = x \cdot y'' + (1-x) \cdot y' - y$$

$$y^{(4)} = y'' + x \cdot y''' - y' + (1-x) \cdot y'' - y' = x \cdot y''' + (2-x) \cdot y'' - 2y'$$

$$y^{(5)} = y''' + x \cdot y^{(4)} - y'' + (2-x) \cdot y''' - 2y'' = x \cdot y^{(4)} + (3-x) \cdot y''' - 3y''$$

Можно заметить, что в общем случае получается

$$y^{(n)} = (n-2) \cdot y''' - (n-2) \cdot y'' + x \cdot y^{(n-1)} - x \cdot y^{(n-2)}$$

Вычисляем значения производных в точке $x = 0$:

$$y'''(0) = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$y^{(4)}(0) = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$y^{(5)}(0) = 0 - 3 - 0 = -3$$

Решение:

$$y = 1 + 0 + 0 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + 0 + \frac{-3}{5!} \cdot x^5 = 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}$$

2. Способ неопределённых коэффициентов.

Представим коэффициенты уравнения

$$y'' - x \cdot y' + x \cdot y = 0$$

т.е.

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x)$$

степенными рядами:

$$p_1(x) = -x, \quad p_2(x) = x, \quad f(x) = 0.$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots,$$

тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \ldots$$

ЯГУБОВ.РФ

Из начальных условий $y(0)=1$, $y'(0)=0$ находим $c_0=1$, $c_1=0$. Подставим полученные ряды в ДУ:

$$\left(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots\right)-x\cdot\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots\right)+x\cdot\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots\right)=0$$

$$\left(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\ldots\right)-x\cdot\left(2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots\right)+x\cdot\left(1+c_2x^2+c_3x^3+\ldots\right)=0$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^0: $2c_2=0$,

x^1: $6c_3+1=0$,

x^2: $12c_4-2c_2=0$,

x^3: $20c_5-3c_3+c_2=0$ ...

Отсюда находим

$$c_2=0,\quad c_3=-\frac{1}{6},\quad c_4=0,\quad c_5=-\frac{1}{40}\quad\ldots$$

Так что три первых члена разложения решения ДУ в степенной ряд:

$$y=1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. “Конспект лекций по высшей математике”, 2006, стр. 475.

2) Найти четыре первых члена разложения решения ДУ в степенной ряд

$y''=y\cdot e^x$, если $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Используем для решения способ последовательного дифференцирования.

Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot(x-0)+\frac{y''(0)}{2!}\cdot(x-0)^2+\ldots$$

Находим $y''(0)$, подставив $x=0$ в исходное уравнение:

$$y''(0)=1.$$

Последующие коэффициенты находим, дифференцируя заданное ДУ:

$$y'''=y'e^x+ye^x=e^x\left(y'+y\right)$$

$$y^{(4)}=y''e^x+y'e^x+y'e^x+ye^x=e^x\left(y''+2y'+y\right)$$

Вычисляем значения производных в точке $x=0$:

$$y'''(0)=0+1=1$$

$$y^{(4)}(0)=1+2\cdot 0+1=2$$

Решение:

$$y=1+\frac{0}{1!}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{2}{4!}\cdot x^4+\ldots\approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{12}\cdot x^4$$

3) Найти три первых члена разложения решения ДУ в степенной ряд

$y'' + y \cdot \cos x = 0$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Применим для разложения способ последовательного дифференцирования.

Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{y''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \ldots$$

Находим $y''(0)$, подставив $x = 0$ в исходное уравнение:

$$y''(0) = 0.$$

Последующие коэффициенты находим, дифференцируя заданное ДУ $y'' + y \cdot \cos x = 0$:

$$y''' = -y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x$$

$$y^{(4)} = -y'' \cdot \cos x + y' \cdot \sin x + y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x = -y'' \cdot \cos x + 2y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x$$

$$y^{(5)} = -y''' \cdot \cos x + y'' \cdot \sin x + 2y'' \cdot \sin x + 2y' \cdot \cos x + y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x =$$

$$= -y''' \cdot \cos x + 3y'' \cdot \sin x + 3y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x$$

Вычисляем значения производных в точке $x = 0$:

$$y'''(0) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1$$

$$y^{(4)}(0) = -0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$y^{(5)}(0) = -(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

Решение:

$$y \approx 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + 0 + \frac{(-1)}{3!} \cdot x^3 + 0 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Ягубов.РФ