

1) Решить операторным методом дифференциальное уравнение

$$x'' + 3x' = -3e^{-3t}$$

при заданных начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p)$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - 1$$

С учётом

$$-3e^{-3t} \doteq -3 \cdot \frac{1}{p - (-3)} = \frac{-3}{p + 3}$$

исходное ДУ запишем в виде

$$p^2 X(p) - 1 + 3pX(p) = -\frac{3}{p + 3}$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{(p + 3)^2}$$

Используя известное соответствие

$$e^{at} \cdot t^n \doteq \frac{n!}{(p - a)^{n+1}},$$

получаем искомое частное решение ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1:$$

$$x(t) = t \cdot e^{-3t}$$

Решение в Maple 12:

$$\text{dsolve}(\{x''(t) + 3x'(t) = -3 \cdot e^{-3t}, x(0) = 0, x'(0) = 1\});$$
$$x(t) = e^{-3t} t$$

Литература:

- 1) Ибралилов Р.Б., Пяткова В.Б. "Математика, 4-й семестр", методичка УрГТУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 73 (пример 2.1);
- 2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 594, стр. 595 (пример 80.1);
- 3) Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 164.

2) Методом операционного исчисления найти частное решение ДУ

$$x''' - 2x'' + x' = 4,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \\ x''(0) = -2 \end{cases}$$

Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p - 2$$

$$x'''(t) \doteq p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p) - p^2 - 2p + 2$$

С учётом

$$4 \doteq \frac{4}{p}$$

исходное ДУ запишем в виде

$$p^3 X(p) - p^2 - 2p + 2 - 2 \cdot (p^2 X(p) - p - 2) + pX(p) - 1 = \frac{4}{p}$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2 - 5 + \frac{4}{p}}{p^3 - 2p^2 + p} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^4 - 2p^3 + p^2} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2 \cdot (p-1)^2} = \frac{3}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p-1}$$

Правильная рациональная алгебраическая дробь разложена на сумму простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 \cdot (x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} = \frac{x^3 \cdot (A+C) + x^2 \cdot (-2A+B-C+D) + x \cdot (A-2B) + B}{x^2 \cdot (x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B=-5 \\ B=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=4 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}$$

Используя известные соответствия

$$\frac{1}{p} \doteq 1$$

$$\frac{1}{p^2} \doteq t$$

$$\frac{1}{p-1} \doteq e^t$$

получаем искомое частное решение ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \\ x''(0) = -2 \end{cases}$:

$$x(t) = 3 + 4t - 2e^t$$

Решение в Maple 12:

$$\text{dsolve}(\{x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = 4, x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2\});$$

$$x(t) = -2e^t + 4t + 3$$

Литература:

- 1) Ибрапилов Р.Б., Пяткова В.Б. "Математика, 4-й семестр", методичка УрГТУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 73 (пример 2.1);
- 2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 594, стр. 595 (пример 80.1);
- 3) Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 134, 164.