1) Найти изображение по Лапласу функции

$$f(t)=\begin{cases}\sin^2 t, & 0\le t\le\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$$

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называют функцию комплексного переменного $p=x+iy$, определяемую соотношением

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, то это соответствие записывают символически как

$$f(t)\risingdotseq F(p),\quad F(p)\risingdotseq f(t),\quad L[f(t)]=F(p)$$

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция

$$\chi(t)=\begin{cases}0 & при\ t<0\\ 1 & при\ t\ge 0\end{cases}$$

► Проще всего найти изображение по определению, непосредственно сделав соответствующие вычисления в какой-либо математической программе, например Mathcad 14:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\pi}\sin^2(t)e^{-pt}dt+\int_{\pi}^{+\infty}0\cdot e^{-pt}dt=-\frac{2\cdot e^{-\pi p}}{p\cdot(p^2+4)}+\frac{2}{p\cdot(p^2+4)}=\frac{2\cdot(1-e^{-\pi p})}{p\cdot(p^2+4)}$$

► В учебных целях проползём этот же путь по-пластунски (вычислим интеграл вручную).
Сначала вычисляем неопределённый интеграл

$$\int\sin^2(x)e^{-px}dx=\frac{1}{2}\cdot\int e^{-px}dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)e^{-px}dx=-\frac{1}{2p}e^{-px}-\frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)e^{-px}dx$$

Интеграл во втором слагаемом:

$$\int\cos(2x)e^{-px}dx=\begin{bmatrix}u=\cos 2x\\ du=-2\sin 2x\ dx\\ dv=e^{-px}dx\\ v=-\frac{1}{p}e^{-px}\end{bmatrix}=uv-\int vdu=-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\cos 2x-\frac{2}{p}\cdot\int\sin(2x)e^{-px}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=\sin 2x\\ du=2\cos 2x\ dx\\ dv=e^{-px}dx\\ v=-\frac{1}{p}e^{-px}\end{bmatrix}=-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\cos 2x-\frac{2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\sin 2x+\frac{2}{p}\cdot\int\cos(2x)e^{-px}dx\right)$$

Получено соотношение, из которого найдём искомый интеграл $\int\cos(2x)e^{-px}dx=\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I}=-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\cos 2x-\frac{2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\sin 2x+\frac{2}{p}\cdot\mathbf{I}\right)$$

$$\boldsymbol{I}=-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\cos 2x+\frac{2}{p^2}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x-\frac{4}{p^2}\cdot\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{I}\cdot\left(1+\frac{4}{p^2}\right)=-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\cos 2x+\frac{2}{p^2}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x$$

$$I=-\frac{p}{\left(p^2+4\right)}e^{-px}\cdot\cos 2x+\frac{2p}{\left(p^2+4\right)}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x$$

$$\int\cos(2x)e^{-px}dx=-\frac{p}{\left(p^2+4\right)}e^{-px}\cdot\cos 2x+\frac{2p}{\left(p^2+4\right)}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x$$

Следовательно

$$\int\sin^2(x)e^{-px}dx=-\frac{1}{2p}e^{-px}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{p}{\left(p^2+4\right)}e^{-px}\cdot\cos 2x+\frac{2p}{\left(p^2+4\right)}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x\right)=$$

$$=-\frac{1}{2p}e^{-px}+\frac{p}{2\left(p^2+4\right)}e^{-px}\cdot\cos 2x-\frac{p}{\left(p^2+4\right)}\cdot e^{-px}\cdot\sin 2x=-\frac{1}{2p}e^{-px}+\frac{p}{\left(p^2+4\right)}e^{-px}\cdot\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 2x\right)$$

И

$$\int_0^\pi\sin^2(t)e^{-pt}dt=\left(\left(-\frac{1}{2p}e^{-pt}+\frac{p}{\left(p^2+4\right)}e^{-pt}\cdot\left(\frac{1}{2}\cos 2t-\sin 2t\right)\right)\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\left(-\frac{1}{2p}e^{-\pi p}+\frac{p}{2\left(p^2+4\right)}e^{-\pi p}\right)-\left(-\frac{1}{2p}+\frac{p}{2\left(p^2+4\right)}\right)=$$

$$=-\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}e^{-\pi p}+\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{2\cdot\left(1-e^{-\pi p}\right)}{p\left(p^2+4\right)}$$

► Длительных вычислений вручную можно избежать, если использовать для нахождения изображения функции таблицу соответствий оригиналов и изображений, и свойства преобразования Лапласа.

$$f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2t).$$

Найдём изображение для функции

$$g(t)=1-\cos 2t \qquad (0\le t\le\pi)$$

Представим рассматриваемую функцию в виде

$$g(t)=(1-\cos 2t)\cdot\chi(t)-(1-\cos 2t)\cdot\chi(t-\pi)$$

Известны изображения

$$\cos(\omega t)\ \risingdotseq\ \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad 1\ \risingdotseq\ \frac{1}{p}$$

Используя теорему линейности и запаздывания, получаем

$$g(t)\risingdotseq\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)-\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\cdot e^{-\pi p}=\frac{4}{p\cdot\left(p^2+4\right)}-\frac{4}{p\cdot\left(p^2+4\right)}\cdot e^{-\pi p}=\frac{4\cdot\left(1-e^{-\pi p}\right)}{p\cdot\left(p^2+4\right)}$$

В итоге

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot g(t)\ \risingdotseq\ \frac{2\cdot\left(1-e^{-\pi p}\right)}{p\cdot\left(p^2+4\right)}$$

Литература:

1) Исрапилов Р.Б., Пяткова В.Б. “Математика, 4-й семестр”, методичка УрГГУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 65;
2) Письменный Д.Т."Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 572, стр. 589;
3) Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 127;
4) Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. “Функции комплексного переменного”, 2002, стр. 270.