1) Частное решение дифференциального уравнения

$$x''+9x=\cos 3t\,,\quad x(0)=1\,,\ x'(0)=0\,,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям, найти двумя способами: классическим и операторным.

Классический способ решения

$$x''+9x=\cos 3t$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{x}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения x^* неоднородного уравнения: $x=\hat{x}+x^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$x''+9x=0$$

Его характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет корни комплексные сопряжённые $k_{1,2}=0\pm 3i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 358, случай 3]

$$\hat{x}=C_1e^{0t}\cos(3t)+C_2e^{0t}\sin(3t)=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую особый вид, частное решение ДУ найдём методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 363, случай 2]

$$f(t)=e^{\alpha t}\cdot\left(P_n(t)\cdot\cos\beta t+Q_m(t)\cdot\sin\beta t\right)$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$x^*=t^r\cdot e^{\alpha t}\cdot\left(M_l(t)\cdot\cos\beta t+N_l(t)\cdot\sin\beta t\right)$$

где r - число, равное кратности $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(t)$, m - порядок многочлена $Q_m(t)$,

$M_l(t)$ и $N_l(t)$ - многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами,

l - наивысшая степень многочленов $P_n(t)$ и $Q_m(t)$, т.е. $l=\max(n,m)$.

т.е.

$$x^*=t^1\cdot e^{0t}\cdot\left(A\cdot\cos 3t+B\cdot\sin 3t\right)=t\cdot\left(A\cdot\cos 3t+B\cdot\sin 3t\right)$$

Тогда

$$\left(x^*\right)'=\left(A+3Bt\right)\cdot\cos 3t+\left(-3At+B\right)\cdot\sin 3t$$

$$\left(x^*\right)''=-3\cdot\left[\left(3At-2B\right)\cdot\cos 3t+\left(2A+3Bt\right)\cdot\sin 3t\right]$$

Подставив x^*, $\left(x^*\right)'$, $\left(x^*\right)''$ в исходное уравнение, получим

$$-3\cdot\left[\left(3At-2B\right)\cdot\cos 3t+\left(2A+3Bt\right)\cdot\sin 3t\right]+9\cdot t\cdot\left(A\cdot\cos 3t+B\cdot\sin 3t\right)=\cos 3t$$

$$\left(3At+6B\right)\cdot\cos 3t-6A\cdot\sin 3t=\cos 3t$$

откуда

$$\begin{cases}3At+6B=1\\-6A=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}A=0\\B=1/6\end{cases}$$

Так что частное решение имеет вид

$$x^*=\frac{t}{6}\cdot\sin 3t$$

Лубов.рф

и общее решение исходного ДУ

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{t}{6} \cdot \sin 3t$$

Используя начальные условия $x(0) = 1$ и $x'(0) = 0$, находим константы C_1 и C_2:

$$x' = \left(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{t}{6} \cdot \sin 3t \right)' = \left(\frac{t}{2} + 3C_2 \right) \cdot \cos 3t + \left(\frac{1}{6} - 3C_1 \right) \cdot \sin 3t$$

$$\begin{cases} C_1 + 0 + 0 = 1 \\ 3C_2 + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$x = \cos 3t + \frac{t}{6} \cdot \sin 3t$ - частное решение ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Операторный способ решения

Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$. Тогда

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p$$

С учётом

$$\cos 3t \doteqdot \frac{p}{p^2 + 3^2}$$

исходное ДУ запишем в виде

$$p^2 X(p) - p + 9X(p) = \frac{p}{p^2 + 3^2}$$

откуда

$$X(p) = \frac{p \cdot (p^2 + 10)}{(p^2 + 9)^2} = \frac{p}{(p^2 + 9)} + \frac{p}{(p^2 + 9)^2}$$

Используя известные соответствия

$$\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$t \cdot \sin \omega t \doteqdot \frac{2\omega p}{p^2 + \omega^2}$$

получаем искомое частное решение ДУ,
удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$:

$$x(t) = \cos 3t + \frac{t}{6} \cdot \sin 3t$$

Литература:

1) Исрапилов Р.Б., Пяткова В.Б. “Математика, 4-й семестр”, методичка УрГГУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 73 (пример 2.1);
2) Письменный Д.Т."Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 594, стр. 595 (пример 80.1);
3) Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 164.

Студфов.рф

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x''[t] + 9 x[t] == Cos[3 t], x[t], t] // Simplify
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \left(\frac{1}{36} + C[1]\right) \text{Cos}[3\,t] + \frac{1}{6}\,(t + 6\,C[2])\,\text{Sin}[3\,t]\right\}\right\}$$

```
DSolve[{x''[t] + 9 x[t] == Cos[3 t], x[0] == 1, x'[0] == 0}, x[t], t] // Simplify
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \text{Cos}[3\,t] + \frac{1}{6}\,t\,\text{Sin}[3\,t]\right\}\right\}$$

Ягубов.рф