Найти общее решение системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$

1-й способ решения.

(методом сведения системы к одному ДУ высшего порядка)

Сведём систему ДУ к одному ДУ второго порядка последовательным дифференцированием одного из её уравнений и соответствующими подстановками.

$$\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad x = -\frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y \qquad (*)$$

Продифференцируем второе уравнение системы и сделаем подстановки, позволяющие прийти к ДУ одной переменной:

$$y'' = -2x' - 3y'$$

$$y'' = -2\cdot(-5x - 4y) - 3y'$$

$$y'' = 10x + 8y - 3y'$$

$$y'' = 10\cdot\left(-\frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y\right) + 8y - 3y'$$

$$y'' = -5y' - 15y + 8y - 3y'$$

$$y'' + 8y' + 7y = 0$$

- линейное однородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $k^2 + 8k + 7 = 0$ имеет корни действительные и простые (различные): $k_1 = -7,\ k_2 = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 355, случай 1]

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 \cdot e^{-t}$$

Находим функцию $x(t)$, используя равенство (*):

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cdot\left(C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 \cdot e^{-t}\right)' - \frac{3}{2}\cdot\left(C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 \cdot e^{-t}\right) =$$

$$= \frac{7C_1}{2}e^{-7t} + \frac{C_2}{2}e^{-t} - \frac{3C_1}{2}e^{-7t} - \frac{3C_2}{2}e^{-t} = 2C_1 \cdot e^{-7t} - C_2 \cdot e^{-t}$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 \cdot e^{-7t} - C_2 \cdot e^{-t} \\ y(t) = C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 370 (пример 52.1);

2) Пушкарь Е.А. "Дифференциальные уравнения в задачах и примерах", 2007, стр. 104, стр. 111 (метод интегрируемых комбинаций), стр. 118 (метод исключения неизвестных).

Проверку сделаем дифференцированием найденных решений:

$$x'(t) = -14C_1e^{-7t} + C_2e^{-t} = -10C_1e^{-7t} + 5C_2e^{-t} - 4C_1e^{-7t} - 4C_2e^{-t} = -5x - 4y$$

$$y'(t) = -7C_1e^{-7t} - C_2e^{-t} = -4C_1e^{-7t} + 2C_2e^{-t} - 3C_1e^{-7t} - 3C_2e^{-t} = -2x - 3y$$

2-й способ решения.
(методом интегрируемых комбинаций)

$$\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$x' + y' = -7x - 7y$$

$$x' + y' = -7 \cdot (x + y)$$

Положим $x + y = z$, тогда уравнение принимает вид

$$z' = -7z$$

$$\frac{dz}{dt} = -7z$$

$$\frac{dz}{z} = -7dt$$

$$\ln|z| = -7t + \ln|C_1|$$

$$z = C_1 e^{-7t}$$

$$x + y = C_1 e^{-7t}$$

- получен первый интеграл системы. Из него выразим допустим функцию x через y:

$$x = C_1 e^{-7t} - y$$

Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$y' = -2 \cdot \left(C_1 e^{-7t} - y\right) - 3y$$

$$y' = -2C_1 e^{-7t} - y$$

$$y' + y = -2C_1 e^{-7t}$$

Найдём функцию y подстановкой $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ (метод Бернулли):

$$u'v + uv' + uv = -2C_1 e^{-7t}$$

$$u'v + u \cdot (v' + v) = -2C_1 e^{-7t} \qquad (**)$$

Подберём функцию v так, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$$v' + v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dt$$

$$\ln|v| = -t$$

$$v = e^{-t}$$

Перепишем (**) с учётом полученного результата:

$$u'e^{-t} = -2C_1 e^{-7t}$$

$$\frac{du}{dt} = -2C_1 e^{-6t}$$

$$du = -2C_1 e^{-6t} dt$$

$$u = \frac{C_1}{3} e^{-6t} + C_2$$

$$y = uv = \left(\frac{C_1}{3}e^{-6t} + C_2\right)\cdot v$$

$$y = \left(\frac{C_1}{3}e^{-6t} + C_2\right)\cdot e^{-t}$$

$$y = \frac{C_1}{3}e^{-7t} + C_2 e^{-t}$$

$$x = C_1 e^{-7t} - y = C_1 e^{-7t} - \frac{C_1}{3}e^{-7t} - C_2 e^{-t}$$

$$x = \frac{2C_1}{3}e^{-7t} - C_2 e^{-t}$$

Переопределив константу $C_1 \leftarrow C_1/3$, окончательно запишем

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\cdot e^{-7t} - C_2\cdot e^{-t} \\ y(t) = C_1\cdot e^{-7t} + C_2\cdot e^{-t} \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-7t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-t}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 371 (пример 52.2).

Решение в Mathematica 6:

```
DSolve[{x'[t] == -5 x[t] - 4 y[t], y'[t] == -2 x[t] - 3 y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{3}e^{-7t}\left(2+e^{6t}\right)C[1] - \frac{2}{3}e^{-7t}\left(-1+e^{6t}\right)C[2],\ y[t] \to -\frac{1}{3}e^{-7t}\left(-1+e^{6t}\right)C[1] + \frac{1}{3}e^{-7t}\left(1+2e^{6t}\right)C[2]\right\}\right\}$$

если переопределить константы

$$C_1 \leftarrow (C_1 + C_2)/3$$

$$C_2 \leftarrow (-C_1 + 2C_2)/3$$

то решение можно записать в более компактном виде

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\cdot e^{-7t} - C_2\cdot e^{-t} \\ y(t) = C_1\cdot e^{-7t} + C_2\cdot e^{-t} \end{cases}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(\left[\frac{d}{dt}x(t) = -5\,x(t) - 4\,y(t),\ \frac{d}{dt}y(t) = -2\,x(t) - 3\,y(t)\right]\right);$$

$$\left\{x(t) = \_C1\,e^{-7t} + \_C2\,e^{-t},\ y(t) = \frac{1}{2}\,\_C1\,e^{-7t} - \_C2\,e^{-t}\right\}$$

переопределив константу

$$C_1 \leftarrow C_1/2$$

запишем решение в наиболее компактном виде

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\cdot e^{-7t} - C_2\cdot e^{-t} \\ y(t) = C_1\cdot e^{-7t} + C_2\cdot e^{-t} \end{cases}$$

Решение в Mathcad 14 (средствами операционного исчисления):

$$x := X(s) \qquad x' := s\cdot X(s) - C_1$$

$$y := Y(s) \qquad y' := s\cdot Y(s) - C_2$$

$$\begin{pmatrix} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{3\cdot C_1 - 4\cdot C_2 + C_1\cdot s}{s^2 + 8\cdot s + 7} & \dfrac{5\cdot C_2 - 2\cdot C_1 + C_2\cdot s}{s^2 + 8\cdot s + 7} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3\cdot C_1 - 4\cdot C_2 + C_1\cdot s}{s^2 + 8\cdot s + 7} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{C_1\cdot e^{-t}}{3} - \frac{2\cdot C_2\cdot e^{-t}}{3} + \frac{2\cdot C_1\cdot e^{-7\cdot t}}{3} + \frac{2\cdot C_2\cdot e^{-7\cdot t}}{3}$$

$$\frac{5\cdot C_2 - 2\cdot C_1 + C_2\cdot s}{s^2 + 8\cdot s + 7} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2\cdot C_2\cdot e^{-t}}{3} - \frac{C_1\cdot e^{-t}}{3} + \frac{C_1\cdot e^{-7\cdot t}}{3} + \frac{C_2\cdot e^{-7\cdot t}}{3}$$

если переопределить константы

$$C_1 \leftarrow (C_1 + C_2)/3$$

$$C_2 \leftarrow (-C_1 + 2C_2)/3$$

то решение примет вид

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\cdot e^{-7t} - C_2\cdot e^{-t} \\ y(t) = C_1\cdot e^{-7t} + C_2\cdot e^{-t} \end{cases}$$

Литература:

1) Половко А.М. "Mathematica 5 для студента",2007, стр. 288;

2) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9", 2006, стр. 338;

3) Сдвижков О.А. "Mathcad-2000: введение в компьютерную математику", 2002, стр. 121 (пример).