1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)}+2y'''+y''=12x^2-6x$$

- это линейное неоднородное ДУ 4-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y=\hat{y}+y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(4)}+2y'''+y''=0$$

Его характеристическое уравнение $k^4+2k^3+k^2=0$ имеет корни действительные и кратные $k_{1,2}=-1$, $k_{3,4}=0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 2]

$$\hat{y}=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot xe^{-x}+C_3+C_4\cdot x$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую особый (специальный) вид, частное решение ДУ найдём методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^*=x^r\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

где r - число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ - многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^*=x^2\cdot\left(A\cdot x^2+B\cdot x+C\right)\cdot e^{0\cdot x}=A\cdot x^4+B\cdot x^3+C\cdot x^2$$

Тогда

$$\left(y^*\right)'=4A\cdot x^3+3B\cdot x^2+2C\cdot x$$

$$\left(y^*\right)''=12A\cdot x^2+6B\cdot x+2C$$

$$\left(y^*\right)'''=24A\cdot x+6B$$

$$\left(y^*\right)^{(4)}=24A$$

Подставив y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение, получим

$$24A+2\cdot(24A\cdot x+6B)+12A\cdot x^2+6B\cdot x+2C=12x^2-6x$$

$$x^2\cdot 12A+x\cdot(48A+6B)+(24A+12B+2C)=12x^2-6x$$

$$\begin{cases}12A=12\\48A+6B=-6\\24A+12B+2C=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1\\B=-9\\C=42\end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^*=x^4-9x^3+42x^2$$

а общее решение исходного уравнения

$$y=\hat{y}+y^*=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot xe^{-x}+C_3+C_4\cdot x+x^4-9x^3+42x^2$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y''''+2y'''+y''=12x^2-6x\right);$$

$$y(x)=e^{-x}\_C2+\_C1\left(e^{-x}x+2e^{-x}\right)-9x^3+x^4+42x^2+\_C3\,x+\_C4$$

2) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+3y''+2y'=(1-2x)e^{-x}$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y=\hat{y}+y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'''+3y''+2y'=0$$

Его характеристическое уравнение $k^3+3k^2+2k=0$ имеет корни действительные и различные $k_1=-2$, $k_2=-1$, $k_3=0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения (**) [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{0\cdot x}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую специальный вид, частное решение ДУ найдём методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^*=x^r\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

где r - число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ - многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^*=x^1\cdot(A\cdot x+B)\cdot e^{-x}=\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}$$

Тогда

$$\left(y^*\right)' = e^{-x}\cdot\left(-Ax^2+\left(2A-B\right)x+B\right)$$

$$\left(y^*\right)'' = e^{-x}\cdot\left(Ax^2+\left(-4A+B\right)x+2A-2B\right)$$

$$\left(y^*\right)''' = e^{-x}\cdot\left(-Ax^2+\left(6A-B\right)x-6A+3B\right)$$

Подставив y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение, получим

$$e^{-x}\cdot\left(-Ax^2+\left(6A-B\right)x-6A+3B\right)+3e^{-x}\cdot\left(Ax^2+\left(-4A+B\right)x+2A-2B\right)+2e^{-x}\cdot\left(-Ax^2+\left(2A-B\right)x+B\right)=$$
$$=\left(1-2x\right)e^{-x}$$

$$\left(-Ax^2+\left(6A-B\right)x-6A+3B\right)+3\cdot\left(Ax^2+\left(-4A+B\right)x+2A-2B\right)+2\cdot\left(-Ax^2+\left(2A-B\right)x+B\right)=\left(1-2x\right)$$

$$-2Ax-B=-2x+1$$

$$\begin{cases}-2A=-2\\ -B=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^*=\left(x^2-x\right)\cdot e^{-x}$$

а общее решение исходного уравнения

$$y=\hat{y}+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+C_3+\left(x^2-x\right)\cdot e^{-x}=C_1e^{-2x}+\left(x^2-x+C_2\right)\cdot e^{-x}+C_3$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y'''+3y''+2y'=(1-2x)\cdot e^{-x}\right);$$

$$y(x)=-e^{-x}x-e^{-x}+e^{-x}x^2+\frac{1}{2}\_C1\,e^{-2x}-e^{-x}\_C2+\_C3$$

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''' - 25y' = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^3 - 25k = 0$ имеет корни действительные и различные $k_1 = -5$, $k_2 = 0$, $k_3 = 5$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{0 \cdot x} = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{5x} + C_3$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение y^* неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: методом неопределённых коэффициентов [1, стр. 362]. В данном случае правая часть уравнения имеет два специальных слагаемых и частное решение найдём как суперпозицию двух частных решений.

Для слагаемого вида [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ - многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y_1^* = x^1 \cdot A \cdot e^{5x} = Ax \cdot e^{5x}$$

Для слагаемого вида [1, стр. 363, случай 2]

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x\right)$$

частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x\right)$$

где r - число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$, m - порядок многочлена $Q_m(x)$,

$M_l(x)$ и $N_l(x)$ - многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами,

l - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l = \max(n, m)$.

т.е.

$$y_2^* = x^0 \cdot e^{0x} \cdot (B \cdot \cos 5x + C \cdot \sin 5x) = B\cos 5x + C\sin 5x$$

Так что для правой части в целом частное решение имеет вид

$$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax \cdot e^{5x} + B\cos 5x + C\sin 5x$$

Тогда

$$\left(y^*\right)' = Ae^{5x}\cdot(1+5x) - 5B\sin 5x + 5C\cos 5x$$

$$\left(y^*\right)'' = 5Ae^{5x}\cdot(2+5x) - 25B\cos 5x - 25C\sin 5x$$

$$\left(y^*\right)''' = 25Ae^{5x}\cdot(3+5x) + 125B\sin 5x - 125C\cos 5x$$

Подставив $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)'''$ в исходное уравнение, получим

$$50Ae^{5x} + 250B\sin 5x - 250C\cos 5x \equiv 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$$

что соответствует системе тождеств

$$\begin{cases} 50A \equiv -50 \\ 250B \equiv 25 \\ -250C \equiv 25 \end{cases}$$

откуда получаем коэффициенты

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1/10 \\ C = -1/10 \end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^* = -x\cdot e^{5x} + \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{10}\sin 5x$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = \hat{y} + y^* = C_1e^{-5x} + C_2e^{5x} + C_3 - x\cdot e^{5x} + \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{10}\sin 5x =$$

$$= C_1e^{-5x} + \left(C_2 - x\right)e^{5x} + C_3 + \frac{1}{10}(\cos 5x - \sin 5x)$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y''' - 25\,y' = 25\cdot(\sin(5\,x) + \cos(5\,x)) - 50\cdot e^{5\,x}\right);$$

$$y(x) = \frac{1}{5}\,e^{5\,x}\,\_C2 - \frac{1}{5}\,e^{-5\,x}\,\_C1 - e^{5\,x}\,x + \frac{3}{10}\,e^{5\,x} - \frac{1}{10}\,\sin(5\,x) + \frac{1}{10}\,\cos(5\,x) + \_C3$$